АЛГЕБРА В ТАБЛИЦАХ

11 класс

Роева Т.Г.
Хроленко Н.Ф.

Т.Г. Роева, Н.Ф. Хроленко

АЛГЕБРА В ТАБЛИЦАХ

11 класс

Учебное пособие

Согласовано с программой
Министерства образования и науки Украины

Харьков
2002

УДК 373.167.1:512+512 (075.3)

ББК 22.14 я 721

Р 62

Роева Т. Г., Хроленко Н. Ф. Алгебра в таблицах. 11 класс: Учеб. пособие. – Х.: Країна мрій™, 2002. – 130 с.

Пособие содержит основные теоретические вопросы курса алгебры 11 класса в соответствии с новой программой. Рассмотрены решения типовых задач каждой темы. Подобраны тренировочные упражнения, самостоятельные и контрольные работы ко всем разделам. Самостоятельные и контрольные работы имеют три уровня сложности. К большинству задач даны ответы. В рубрике «Страничка абитуриента» приведены решения задач повышенной сложности, это поможет подготовиться к вступительным экзаменам.

Пособие адресовано учащимся и учителям общеобразовательных школ, абитуриентам.

Посібник містить основні теоретичні питання курсу алгебри 11 класу відповідно до нової програми. Розглянуті розв'язання типових задач кожної теми. Підібрані тренувальні вправи, самостійні і контрольні роботи до всіх розділів. Самостійні та контрольні роботи мають три рівні складності. До більшості задач надані відповіді. В рубриці «Сторінка абітурієнта» подані розв'язання задач підвищеної складності, що допоможе підготуватися до вступних іспитів.

Посібник адресований учням та вчителям загальноосвітніх шкіл, абітурієнтам.

Учебное пособие

IV возрастная группа

Роева Татьяна Григорьевна

Хроленко Наталья Федоровна

Алгебра в таблицах

11 класс

Редактор Томашевская Н. В.

Корректор Ольховская М. А.

Компьютерная верстка Цовма И. Н.

Дизайн обложки Терлецкий А. В.

Подписано к печати 25.06.2002 г. Формат 60х90/8.

Бумага офсет. Печать офсет.

Отпечатано ООО "Фактор-Друк", г. Харьков, ул. Саратовская, 51
Тел. (0572) 175-185, 175-355. Зак. 3537

Издатель Халимон Е.В.

Регистр. свид. №961 от 19.06.2002г

61146, г. Харьков, а/я 2656, тел. 58-50-70

ISBN 966-8220-23-4

Содержание

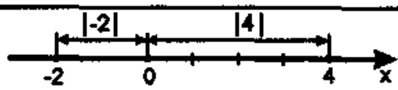
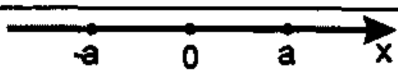
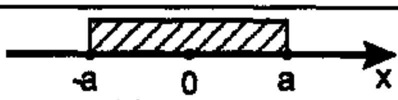
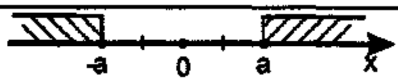
§ 1. Модуль. Предел. Непрерывность. Производная

Модуль числа

Модуль положительного числа равен самому числу. $\left\|\frac{7}{3}\right\| = \frac{7}{3}$.
Модуль отрицательного числа является числом, ему противоположным. $\|-5\| = -(-5) = 5$.
Модуль нуля равен 0. $\|0\| = 0$.

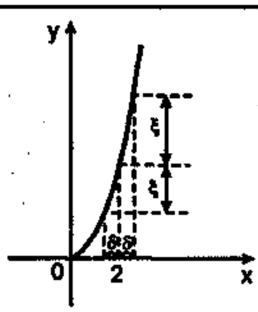
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a>0, \\ 0, & \text{если } a=0, \\ -a, & \text{если } a<0 \end{cases} = \begin{cases} a, & \text{если } a\ge 0, \\ -a, & \text{если } a<0 \end{cases} = \begin{cases} a, & \text{если } a>0, \\ -a, & \text{если } a\le 0 \end{cases} = \begin{cases} a, & \text{если } a\ge 0, \\ -a, & \text{если } a\le 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля

	$\|a\|$ — это расстояние от точки 0 до точки, изображающей число a.
 $\|x\| = a,\ \ a>0$	$\|x\| = a \iff \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -a \end{array}\right.,\ a>0$
 $\|x\| \le a,\ \ a>0$	$\|x\| \le a \iff -a \le x \le a,\ a>0$
 $\|x\| \ge a,\ \ a>0$	$\|x\| \ge a \iff \left[\begin{array}{l} x \ge a \\ x \le -a \end{array}\right.,\ a>0$

Предел функции

Понятие предела



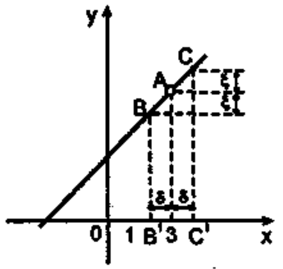
Пример 1.

Рассмотрим таблицу значений функции $y = x^2$ в точках, которые на числовой прямой расположены достаточно близко к числу 2 (и в самой точке 2).

x	1,98	1,99	2,00	2,01	2,02
x^2	3,92	3,96	4,00	4,04	4,08
$\|x^2-4\|$	0,08	0,04	0	0,04	0,08

Чем ближе аргумент x к числу 2 (пишут $x \to 2$), тем ближе значение функций к числу 4 ($f(x) \to 4$).

Записывают так: $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.



Пример 2.

Рассмотрим таблицу значений функции $y = \frac{x^2-3}{x-3}$ около точки $x = 3$.

x	$2,96$	$2,98$	3	$3,02$	$3,04$
$y = \frac{x^2-9}{x-3}$	$5,96$	$5,98$	не определено	$6,02$	$6,04$
$\lvert f(x)-6\rvert$	$0,04$	$0,02$		$0,02$	$0,04$

Если $x \to 3$ $(x \neq 3)$, то $f(x) \to 6$: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$.

В общем случае $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$ означает: если $x \to a$, то $f(x) \to B$.

$\boxed{x \to a} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}|x-a| < \delta \\ \delta > 0\end{matrix}}$ $\qquad$ $\boxed{f(x) \to B} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}|f(x)-B| < \varepsilon \\ \varepsilon > 0\end{matrix}}$

Число B называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, которое при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x)-B| < \varepsilon$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, то B — единственная.

Теоремы о пределах	Примеры
$\lim\limits_{x\to a} c = c$	$\lim\limits_{x\to 2} 5 = 5$.
$\lim\limits_{x\to a} c\ f(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 2} 5x^2 = 5 \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 5\cdot 2^2 = 20$.
$\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to 3}(x^2-4x+2) = \lim\limits_{x\to 3} x^2 - 4\lim\limits_{x\to 3} x + \lim\limits_{x\to 3} 2 =$ $= 3^2 - 4\cdot 3 + 2 = -1$.
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to 3}((x^3+1)\cdot(x-2)^{10}) =$ $= \lim\limits_{x\to 3}(x^3+1)\cdot \lim\limits_{x\to 3}(x-2)^{10} = (3^3+1)(3-2)^{10} =$ $= 28\cdot 1 = 28$.
$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ $(\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0)$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)} = \frac{2+2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$.

$\lim\limits_{x\to a} x = a$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} x = \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{c}{f(x)} = \infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{c}{f(x)} = 0$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Способы вычисления пределов

1. Для любого многочлена (x): $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.	$\lim\limits_{x\to 2}(x^3-4x^2+2x-1) =$ $=2^3-4\cdot 2^2+2\cdot 2-1 = -5.$
2. Если число x_0 входит в область определения дробно-рациональной функции $R(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = R(x_0)$.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-2}{2x^2+7} = \dfrac{3\cdot 3^2-2}{2\cdot 3^2+7} = 1.$
Если в результате подстановки $x = a$ получили выражение $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, то:	
а) попробуем разложить числитель и знаменатель на множители и сократить дробь;	1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)} =$ $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3+1}{3-2} = 4;$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} =$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{0+1}{0-1} = -1;$ 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} =$ $=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{1}{\sqrt{4}+2} = \dfrac{1}{4}.$
б) если дробь нельзя сократить, то в этом случае нужно числитель и знаменатель дроби домножить на выражение, сопряженное со знаменателем (или числителем), а потом сократить дробь;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)} =$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1} = \lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1) =$ $=\sqrt{1+0}+1 = 2.$
в) если под знаком предела стоят тригонометрические фунции или обратные тригонометрические функции, то приводим к первому замечательному пределу: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ если $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{3x} =$ $=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3;$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x-\sin 12x}{10x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x\cos 10x}{10x} =$ $=-\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\cos 10x}{2x} =$ $=-\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos 10x =$ $=-\dfrac{2}{5}\cdot 1\cdot 1 = -\dfrac{2}{5}.$

Непрерывность функции

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если она в ней определена, предел функции в точке x_0 существует и равен значению функции в этой точке.

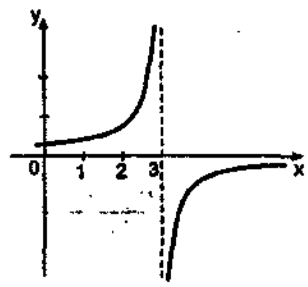
По этому определению ставятся три условия:

1) функция должна быть определена в точке $x = x_0$;

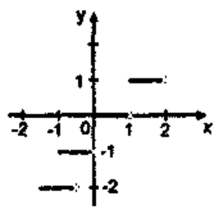
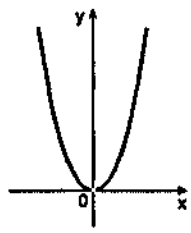
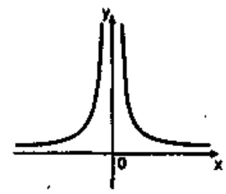
2) функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Пример: $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$; $y = -\dfrac{1}{x-3}$; $x \in (-\infty;3) \cup (3;+\infty)$ $x \neq 3$.



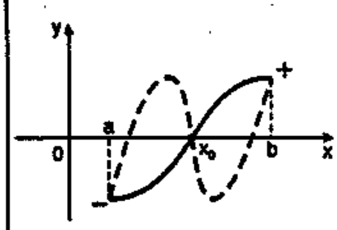
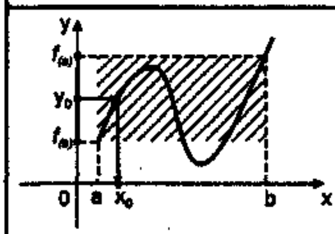
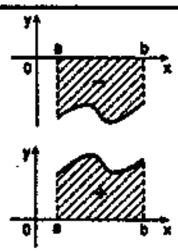
Данная функция не будет непрерывной в точке $x_0 = 3$, поскольку она не определена при $x = 3$. Те точки, в которых эти условия не выполняются, называются **точками разрыва**. $x = 3$ – точка разрыва.

Примеры функций, которые имеют точки разрыва		
$y = [x]$ — целая часть x  Точки разрыва — все целочисленные точки.	$y = \dfrac{x^3}{x}$  0 — точка разрыва.	$y = \dfrac{1}{x^2}$  0 — точка разрыва.

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого промежутка I, то её называют **непрерывной на промежутке** I.

В школьном курсе математики:

График функции, непрерывной на промежутке, — непрерывная линия на этом промежутке.

Свойства		
Иллюстрация	**Формулировка**	**Пример использования**
	1. Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то в некоторой точке этого отрезка она принимает значение, равное нулю.	$f(x) = 4x^3+x-1$ — непрерывная функция (многочлен); $f(0) = -1<0$; $f(1) = 4>0$, поэтому на интервале $(0;1)$ существует точка x, в которой функция равна 0 (это точка $x_0 = \frac{1}{2}$).
	2. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает все промежуточные значения между значениями этой функции в крайних точках, то есть между $f(a)$ и $f(b)$.	$f(x) = 3^x$ — непрерывная функция. Если $x \in [2;3]$, то $3^2 = 9$, $3^3 = 27$. Поскольку $9<15<27$, то существует точка x_0, в которой $f(x_0) = 3^{x_0} = 15$ (как известно, $x_0 = log_3 15$).
	3. Если на интервале (a, b) функция $f(x)$ непрерывна и не превращается в ноль, то на этом интервале функция сохраняет постоянный знак.	На этом свойстве основывается метод интервалов решения неравенств вида $f(x) \gtrless 0$.

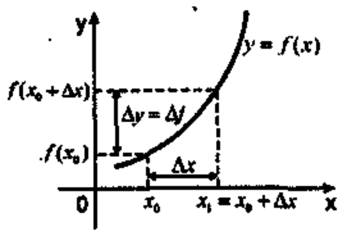
Решим неравенство $f(x) \gtrless 0$, где $f(x)$ — произвольная функция.

1. Найдем область определения функции $f(x)$: $D(f)$.
2. Определим все нули функции, то есть решим уравнение $f(x) = 0$.
3. Разбиваем на промежутки область определения нулями функции.
4. Определим знак функции на каждом промежутке.

Примеры функций, непрерывных на всей области определения

	Функция	Область определения
1.	$y = x$	$x \in (-\infty;+\infty)$
2.	$y = x^n$	$x \in (-\infty;+\infty)$
3.	$y = \frac{1}{x-a}$	$x \neq a$
4.	$y = \sqrt{x}$	$x \geq 0$
5.	$y = log_a x \; \begin{pmatrix} a>0 \\ a\neq 1 \end{pmatrix}$	$x>0$
6.	$y = sinx$	$x \in (-\infty;+\infty)$
7.	$y = cosx$	$x \in (-\infty;+\infty)$
8.	$y = tgx$	$x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \;\; n \in Z$
9.	$y = ctgx$	$x \neq \pi k, \;\; k \in Z$
10.	$y = arcsinx$; $y = arccosx$	$-1 \leq x \leq 1$
11.	$y = a^x$	$x \in (-\infty;+\infty)$

Приращение аргумента и функции



$\Delta x = x_1 - x_0$ — приращение аргумента в точке x_0;

$x_1 = x_0 + \Delta x$ — начальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx;

$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_1) - f(x_0)$ — приращение функции в точке x_0;

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производная функции $y = f(x)$

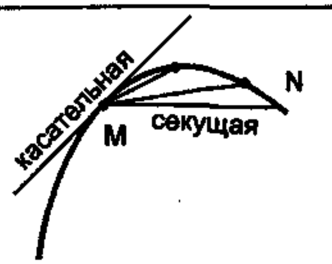
$y = f(x)$

$$\boxed{\begin{gathered} y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x} \end{gathered}}$$

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции в точке x к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю (можно обозначить y' или $f'(x)$).

Операция нахождения производной называется **дифференцированием.**

Касательная к графику функции и геометрический смысл производной



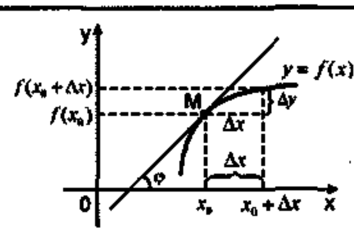
Касательной к кривой в данной точке M называется предельное положение секущей MN, когда точка N стремится вдоль кривой к точке M.

$f'(x_0) = tg\varphi$

k — угловой коэффициент касательной.

$k = tg\varphi = f'(x_0)$.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.



Значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 (и равно угловому коэффициенту касательной).

Механический смысл производной

Производная характеризует скорость изменения функции при изменении аргумента; в частности: производная времени является мерой скорости изменений, используемой по отношению к различным физическим величинам. Например, мгновенная скорость v неравномерного прямолинейного движения является производной от функции, выражающей зависимость пройденного пути S от времени t.

$S = S(t)$ — зависимость пройденного пути от времени;	$v = S'(t)$ — скорость прямолинейного движения;	$a = v'(t)$ — ускорение прямолинейного движения.

<table>
<tr><th colspan="2">Таблица производных некоторых функций</th><th rowspan="2">Правила дифференцирования</th></tr>
<tr><th>Элементарные функции</th><th>Сложные функции</th></tr>
<tr><td>$c' = 0$ (c – const)</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="16">$(c \cdot u(x))' = cu'(x)$
(c — постоянная).

Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Производная суммы
$(u+v)' = u'+v'$.
Производная суммы функций, которые дифференцируются, равна сумме их производных.

Производная произведения
$(u \cdot v)' = u'v+v'u$

Производная частного
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$

Производная сложной функции (функции от функции)
$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$</td></tr>
<tr><td>$(kx+b)' = k$
$x' = 1$
$(-x)' = -1$</td></tr>
<tr><td>$x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$
$(\alpha \in R)$</td><td>$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$(x^2)' = 2x$</td><td>$u^2 = 2u \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$</td><td>$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$</td><td>$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$(sinx)' = cosx$</td><td>$(sinu)' = cosu \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$(cosx)' = -sinx$</td><td>$(cosu)' = -sinu \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}$</td><td>$(tgu)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}$</td><td>$(ctgu)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td><td>$(arcsinu)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td><td>$(arccosu)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$</td><td>$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$</td><td>$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$</td></tr>
</table>

УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

1. Найти.	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.
Решение.	
Упростим выражение $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$. Воспользуемся тем, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$.	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{x\cdot x} =$ $=2\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}\cdot 2\cdot\frac{x}{2}} = \frac{2}{2\cdot 2}\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} =$ $=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$.
Ответ:	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
2. Найти.	$\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.
Решение.	
Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное с числителем. В числителе «свернём» формулу разности квадратов. Сократим на $x-5$.	$\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} =$ $= \lim\limits_{x \to 5} \frac{(\sqrt{x-1})^2-2^2}{(x-5)\cdot(\sqrt{x-1}+2)} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} =$ $= \lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} =$ $= \frac{1}{\sqrt{5-1}+2} = \frac{1}{4}$.
Ответ:	$\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$.
3. Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность в точке $x = x_0$:	
а) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$	б) $f(x) = x^2-4$; $x_0 = 3$.
Решение.	
1) $f(0) = 0$. 2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$.	1) $f(3) = 5$. 2) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2-4) = 5$. 3) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$.
Ответ: функция не является непрерывной в точке $x_0 = 0$.	Ответ: функция непрерывна в точке $x_0 = 3$.

4. Решить неравенство.	$\frac{log_2(x+1)}{x-1} > 0$.

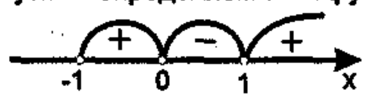
Решение.

Рассмотрим функцию: $f(x) = \frac{log_2(x+1)}{x-1}$.

1) $D(f)$: $\begin{cases} x+1>0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1 \\ x \neq 1, \end{cases}$ $x \in (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

2) Нули функции $f(x)$: $\frac{log_2(x+1)}{x-1} = 0$; $x+1 = 1$; $x = 0$.

3) Разбиваем $D(f)$ на промежутки и определяем знак функции $f(x)$ на каждом из них:

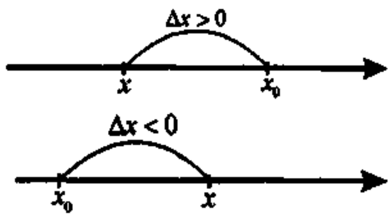


4) Решением исходного неравенства будут промежутки, где $f(x) > 0$; то есть $x \in (-1;0) \cup (1;+\infty)$.

Ответ:	$(-1;0) \cup (1;+\infty)$.

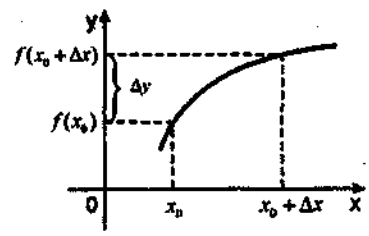
Приращение аргумента

$\Delta x = x - x_0$



Приращение функции

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



Вычислить приращение функции $f(x)$ в произвольной точке.	
а) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$;	
Решение.	
Фиксируем произвольное значение аргумента x_0 и находим $f(x_0)$:	$x = x_0$; $f(x_0) = 2x_0^2 + 3x_0 - 5$.
Зададим аргументу x приращение Δx и найдем $f(x_0 + \Delta x)$:	$x = x_0 + \Delta x$. $f(x_0 + \Delta x) = 2(x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) - 5 =$ $2(x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2) + 3x_0 + 3\Delta x - 5 =$ $= 2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x - 5$.
Находим приращение функции $\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	$\Delta f(x) = (2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x - 5) - (2x_0^2 + 3x_0 - 5) =$ $= 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3\Delta x = \Delta x(4x_0 + 2\Delta x + 3)$.
Ответ:	$\Delta f(x) = \Delta x(4x_0 + 2\Delta x + 3)$.

б) $f(x) = \sin 2x$;	
Решение.	
Фиксируем произвольное значение аргумента x_0 и находим $f(x_0)$:	$x = x_0$; $f(x_0) = \sin 2x_0$.
Зададим аргументу приращение Δx и находим $f(x_0 + \Delta x)$:	$x = x_0 + \Delta x$; $f(x_0 + \Delta x) = \sin 2(x_0 + \Delta x)$.
Находим приращение функции $\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	$\Delta f(x) = \sin 2(x_0 + \Delta x) - \sin 2x_0 =$ $= 2\sin\dfrac{2x_0 + 2\Delta x - 2x_0}{2}\cos\dfrac{2x_0 + 2\Delta x + 2x_0}{2} =$ $= 2\sin\Delta x\cos(2x_0 + \Delta x)$.
Ответ:	$\Delta f(x) = 2\sin\Delta x\cos(2x_0 + \Delta x)$.

Используя определение, вычислить производную функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.	
а) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$; $x_0 = 2$.	
Решение.	
Фиксируем произвольное значение аргумента x и задаем аргументу приращение Δx:	x; $x + \Delta x$
Вычисляем приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$:	$\Delta f = (3(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 1) - (3x^2 - 5x + 1) =$ $= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 5\Delta x = \Delta x(6x + 3\Delta x - 5)$.
Находим отношение приращения функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$:	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(6x + 3\Delta x - 5)}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x - 5$.
Вычисляем производную $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$:	$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(6x + 3\Delta x - 5) = 6x - 5$.
Вычисляем $f'(x_0)$:	$f'(2) = 6 \cdot 2 - 5 = 7$.
Ответ:	$f'(2) = 7$.

б) $f(x) = \sqrt{7x - 5}$; $x_0 = 2$.	
Решение.	
Фиксируем произвольное значение аргумента x и задаем аргументу приращение Δx:	x; $x + \Delta x$.
Вычисляем приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$:	$\Delta f = \sqrt{7(x + \Delta x) - 5} - \sqrt{7x - 5} =$ $= \sqrt{7x + 7\Delta x - 5} - \sqrt{7x - 5}$.
Находим отношение приращения функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$:	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{7x + 7\Delta x - 5} - \sqrt{7x - 5}}{\Delta x}$.

Вычисляем производную $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$;	$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{7x+7\Delta x-5}-\sqrt{7x-5}}{\Delta x} =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{7x+7\Delta x-5-7x+5}{\Delta x(\sqrt{7x+7\Delta x-5}+\sqrt{7x-5})} =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{7}{\sqrt{7x+7\Delta x-5}+\sqrt{7x-5}} = \frac{7}{2\sqrt{7x-5}}$.
Вычисляем $f'(2)$:	$f'(2) = \frac{7}{2\sqrt{7\cdot 2-5}} = \frac{7}{6}$.
Ответ:	$\frac{7}{6}$.

Рассмотрим различные способы вычисления производной.	
Постоянный множитель вынесем за знак производной:	$(5x^2)' = 5\cdot(x^2)' = 5\cdot 2x = 10x$.
Используем формулу $(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$:	$(x^{23})' = 23\cdot x^{23-1} = 23\cdot x^{22}$.
Запишем сначала в виде степени с отрицательным показателем, а потом используем формулу $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$:	$\left(\frac{1}{x^9}\right)' = (x^{-9})' = -9\cdot x^{-9-1} = -9x^{-10} = \frac{-9}{x^{10}}$.
Используем теорему о производной суммы $(u+v)' = u'+v'$:	$(\sin x+\sqrt{x})' = (\sin x)'+(\sqrt{x})' = \cos x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Используем теорему о производной произведения $(u\cdot v)' = u'v+v'u$:	$(4x\cdot\cos x)' = (4x)'\cdot\cos x+(\cos x)'\cdot 4x =$ $= 4\cos x-4x\cdot\sin x$.
Используем теорему о производной частного $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$; $v\neq 0$:	$\left(\frac{2x+3}{\sin x}\right)' = \frac{(2x+3)'\sin x-(\sin x)'\cdot(2x+3)}{\sin^2 x} =$ $= \frac{2\sin x-(2x+3)\cos x}{\sin^2 x}$.
Используем формулу $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$:	$(\sin 14x)' = \cos 14x\cdot(14x)' = \cos 14x\cdot 14 =$ $= 14\cos 14x$.
$(tg u)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$	$\left(tg\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$.
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u'$	$\left(\frac{1}{x^2+4x}\right)' = -\frac{1}{(x^2+4x)^2}\cdot(x^2+4x)' = -\frac{2x+4}{(x^2+4x)^2}$.
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	$(\sqrt{\sin x})' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}(\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.
Сначала выделим целую часть, а затем найдем производную сложной функции вида $\frac{1}{u}$:	$\left(\frac{x+10}{x+8}\right)' = \left(\frac{x+8+2}{x+8}\right)' = \left(1+\frac{2}{x+8}\right)' = -\frac{2}{(x+8)^2}$.
Сначала запишем в виде степени с отрицательным показателем, а затем найдем производную сложной функции:	$\left(\frac{1}{(4x-5)^6}\right)' = ((4x-5)^{-6})' = -6(4x-5)^{-7}\cdot 4 =$ $= -\frac{24}{(4x-5)^7}$.

$y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$	Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0;y_0)$, принадлежащей графику.

Составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$.		
Решение.	а) $f(x) = x^3+2x^2-5;\ x_0 = 1;$	б) $f(x) = \sin 2x;\ x_0 = \frac{\pi}{8};$
Вычисляем значение функции в точке x_0 $f(x_0)$:	$f(x_0) = f(1) = 1^3+2\cdot 1^2-5 = -2$	$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{2\cdot\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
Находим производную функции $f'(x)$:	$f'(x) = 3x^2+4x$	$f'(x) = 2\cos 2x.$
Вычисляем значение производной в точке x_0 $f'(x_0)$:	$f'(x_0) = f'(1) = 3\cdot 1^2+4\cdot 1 = 7$	$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\frac{2\cdot\pi}{8} =$ $= 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$
Значение $f(x_0)$; $f'(x_0)$; x_0 подставляем в уравнение касательной:	$y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $y = -2+7\cdot(x-1) =$ $= -2+7x-7 = 7x-9$	$y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $y = \frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{8}\right) =$ $= \frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}\pi}{8} =$ $= \sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$
Ответ:	$y = 7x-9.$	$y = \sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$

Решить задачи.
1. Материальная точка двигается по закону $S = 4t^3+t^2+8$ (S измеряется в метрах, t — в секундах). Найти скорость и ускорение в момент $t = 2$ с.
Решение. 1) $v = S'(t) = 12t^2+2t$ — скорость движения точки в любой момент t. 2) $v(2) = 12\cdot 2^2+2\cdot 2 = 48+4 = 52$ (м/с) — скорость движения точки в момент $t = 2$ с. 3) $a = v'(t) = 24t+2$ — ускорение движения точки в момент t. 4) $a(2) = 24\cdot 2+2 = 50$ (м/с^2) — ускорение движения точки в момент $t = 2$ с.
Ответ: 52 м/с; 50 м/с^2.
2. Материальная точка двигается прямолинейно по закону $S = 10t-5t^2$. В какой момент времени скорость точки будет равна нулю?
Решение. 1) $v = S'(t) = 10-10t$ — скорость движения точки в любой момент t. 2) $v = 0,\ \ 10-10t = 0,\ \ 10t = 10,\ t = 1.$
Ответ: $t = 1$ с; скорость точки равна нулю в конце первой секунды.

3. Тело двигается вертикально по закону $h(t) = 2 + 9t - 5t^2$. Определить скорость тела в момент его приземления, если h выражается в метрах, t — в секундах.

Решение.

1) $v(t) = h'(t) = 9 - 10t$ (м/с) — скорость движения тела в момент времени t.

2) В момент приземления тела

$h(t) = 0;\ h(t) = 2 + 9t - 5t^2;$

$2 + 9t - 5t^2 = 0,\ 5t^2 - 9t - 2 = 0.$

$D = (-9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 81 + 40 = 121.$

Значение $t_1 = \dfrac{9-11}{10} = \dfrac{-2}{10} = -\dfrac{1}{5}$ не подходит по условию задачи, т.к. речь идет о моменте времени после начала движения; $t_2 = \dfrac{9+11}{10} = \dfrac{20}{10} = 2$ (с).

В момент приземления тела $t = 2$ с.

3) $v(2) = 9 - 10 \cdot 2 = 9 - 20 = -11$ (м/с).

Ответ: 11 м/с.

4. Скорость v тела, двигающегося в вертикальном направлении, изменяется по закону $v = 9 - 10t$ (м/с). Определить скорость тела в момент приземления, если оно в начальный момент находилось на высоте 2 м от земли.

Решение.

1) $a = v'(t) = -10$ (м/с^2); т.к. ускорение постоянно, то тело движется по квадратичному закону: $h = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + h_0$.

2) $v_0 = v(0) = 9 - 10 \cdot 0 = 9$ (м/с).

3) $h = \dfrac{-10t^2}{2} + 9t + 2 = -5t^2 + 9t + 2$.

Отсюда легко найти время приземления тела $t = 2$ с и скорость в момент приземления $v = -11$ м/с.

Ответ: -11 м/с.

5. При торможении маховик за t секунд поворачивается на угол $\varphi = 5 + 6t - t^2$ (φ — в радианах). Найти: угловую скорость ω вращения маховика в момент $t = 2$ с; угловое ускорение в момент времени t; момент времени t, когда вращение закончится.

Решение.

1) Угловой скоростью ω называется скорость изменения угла φ за время Δt. Угловая скорость — это производная от угла поворота φ за время t: $\omega = \varphi'(t) = 6 - 2t$.

2) $\omega(2) = 6 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2$ (рад/с) — угловая скорость в момент $t = 2$ с.

3) Угловое ускорение — это производная от угловой скорости за время t:

$\varepsilon = \omega'(t);\ \varepsilon = -2$ рад/с^2.

4) В момент остановки маховика:

$\omega = 0;\ \omega = 6 - 2t;\ \ 6 - 2t = 0,\ \ 2t = 6,\ \ t = 3$ с.

В конце третьей секунды угловая скорость будет равна нулю, и вращение закончится.

Ответ: $\omega = 2$ рад/с; $\varepsilon = -2$ рад/с^2; $t = 3$ с.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить уравнение.

а) $|x|+|x-1| = 1$; в) $|x^2-4x| = 4$; д) $|sinx| = -sinx$; ж) $|x^2-2x| = 3-2x$.

б) $|5x+2| = 3-3x$; г) $|2x^2-3| = |4-3x^2|$; е) $|cosx| = cosx$;

2. Решить неравенство.

а) $|2x-1|<3$; в) $|2x+5|\ge 7$; д) $|3x-5|>9x+1$; ж) $|x-1|+|x+1|<4$.

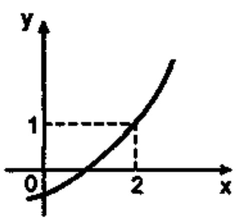
б) $\left|5-\frac{x}{3}\right|<6$; г) $|3+x|\ge|x|$; е) $|2x-5|\le x$;

3. Дана функция $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. Найти: а) $f(0)$; б) $f(a^2)$; в) $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$; г) $f(sin\alpha)$.

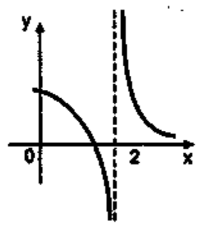
4. Дана функция $f(x) = \begin{cases} cosx, \\ sinx, \end{cases}$ Найти: а) $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$; б) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; в) $f(0)$; г) $f(a^2)$.

5. Среди функций, графики которых изображены на рисунках, указать те, которые непрерывны в точке $x_0 = 2$.

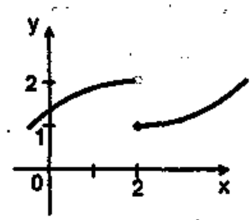
а)



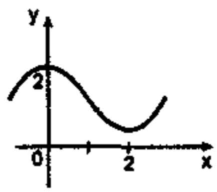
б)



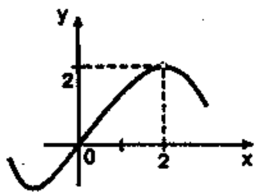
в)



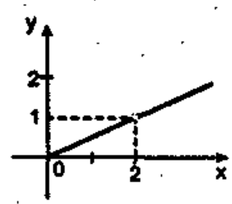
г)



д)



е)



6. Решить неравенство.

а) $(x-3)(x+5)(x-7)\ge 0$; в) $\dfrac{(x^2-4)(x+3)^2\sqrt{1-x}}{x+1}\ge 0$; д) $\dfrac{lg(15-x)}{\sqrt{lgx-1}}$.

б) $\sqrt{x-5}(x+3)<0$; г) $\dfrac{lg(x^2-4)}{\sqrt{x-4}}<0$;

7. Построить график функции.

а) $y = \dfrac{|x-2|}{x-2}$; г) $y = \dfrac{2}{x+1}-2$; ж) $y = \begin{cases} x+3, & x>0 \\ x-1, & x\le 0 \end{cases}$;

б) $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$; д) $y = \dfrac{x}{x-1}+3$; з) $y = \begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$;

в) $y = \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$; е) $y = \dfrac{x-4}{x-5}$; и) $y = \begin{cases} (x-1)^2, & x>1 \\ 2-x, & x\le 1 \end{cases}$.

8. Найти область определения функции.

а) $y = lg(x-3)+lg(5-x)$; г) $y = arcsin\frac{x}{2\pi}+\sqrt{cos2x}$; ж) $y = lg\frac{x(2-x)}{x^2-2x-15}$;

б) $y = \sqrt{3-x}+\frac{x}{\sqrt{x+3}}$; д) $y = lg\frac{x^3-27}{(x-1)^2(x+3)}+\frac{1}{x}$; з) $y = \sqrt{\frac{2x-4}{3-6x}}$;

в) $y = \sqrt{\frac{x^2+8x+15}{x^2-8x+15}}$; е) $y = \sqrt{\frac{x+3}{2x-4}-1}$; и) $y = lg\left(\frac{2x}{x+1}-1\right)$.

9. Вычислить предел.

а) $\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x}-3x)$; е) $\lim\limits_{x\to 0} tgx$; л) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$; р) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}(7+3x+x^2)$; ж) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$; м) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{1-\sqrt{x}}$; с) $\lim\limits_{x\to 5}(x-5)(x^2+5x+25)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x+sin7x}{\frac{x}{4}}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-sin4x}{x}$; н) $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; т) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$.

г) $\lim\limits_{x\to 0} sin2x$; и) $\lim\limits_{x\to 0} cos10x$; о) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-1}{3+x}$; к) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$; п) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin7x}{x}$;

10. Вычислить приращение функции в произвольной точке x.

а) $f(x) = 3x-8$; б) $y = x^2+2$; в) $y = \frac{6}{x}$; г) $y = \sqrt{x}$.

11. Используя определение, вычислить производную функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.

а) $y = 2x+3$; $x_0 = 3$; в) $y = \frac{1}{x}$; $x_0 = -2$; д) $y = cosx$; $x_0 = -\frac{\pi}{3}$;

б) $y = x^2$; $x_0 = 0$; г) $y = \sqrt{x}$; $x_0 = 16$; е) $y = \frac{1}{x+3}$; $x_0 = -1$.

12. Вычислить производную функции.

а) $y = x^{10}+x^8+11x$; г) $y = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$; ж) $y = sinx\cdot(x^2+4)$; к) $y = \sqrt{x}\cdot(5x+3)$;

б) $y = 5x^4+3x^5-x^2$; д) $y = \frac{3}{x^3}+\frac{1}{4x^{21}}-\frac{1}{x}$; з) $y = \frac{cosx}{4x-2}$; л) $y = (x^2-1)(x^3+x)$;

в) $y = \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{8}x^8+\sqrt{x}$; е) $y = 5x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^5}$; и) $y = 7x\cdot tgx$; м) $y = \frac{ctgx}{x^4}$.

13. Вычислить производную функции.

а) $y = \sqrt{2x}$; в) $y = \sqrt{4-x^2}$; д) $y = \frac{1}{12x-10}$; ж) $y = (3x+1)^2$; и) $y = \frac{1}{(2x-3)^6}$.

б) $y = \sqrt{5x-3}$; г) $y = \frac{x+4}{x+2}$; е) $y = \frac{4}{3x^2+6}$; з) $y = (-2x+3)^4$;

14. Вычислить производную функции.

а) $y = sin(4x-1)$; г) $y = \frac{1}{sin3x}$; ж) $y = \frac{1}{cos2x}$; к) $y = \frac{tgx-1}{tgx}$.

б) $y = sin(2x^2+3)$; д) $y = cos(x^2-3)$; з) $y = \sqrt{cos2x}$;

в) $y = sinx^2$; е) $y = cosx^3$; и) $y = tg\frac{x}{2}+ctg\frac{x}{2}$;

15. Решить уравнение.

а) $f'(x)-f(x) = 0$, если $f(x) = x^3$;

б) $f'(x) = g'(x)$, если $f(x) = x^2+4$, $g(x) = (x+1)(4x-3)$.

16. Найти значение производных функций $f(x) = 5x^4+3x^3-15x$ и $g(x) = \frac{3-x}{x+2}$ в точке $= 0$. Проверить, верно ли, что $f'(0)<g'(0)$, если $f(x) = x^2-6x$, $g(x) = x^2\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{2}\right)$.

17. Определить знак производной функции.

а) $f(x) = \frac{x^2}{1+6x}$ в точке $x_0 = -1$; б) $f(x) = \sqrt{x+2}\cdot(x^2-4)$ в точке $x_0 = 0$.

18. Решить неравенство $f'(x)>0$, если:

а) $f(x) = -\frac{1}{4}cos4x-\frac{\sqrt{3}}{2}x$; б) $f(x) = 3cos\left(-\frac{x}{3}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}x$;

в) $f(x) = -5sin\left(-\frac{x}{5}\right)+\frac{1}{2}x$; г) $f(x) = \frac{x^3}{3}+\frac{11\cdot x^2}{2}+30x$.

19. Решить уравнение $f'(x) = g'(x)$.

а) $f(x) = 2cosx$; б) $f(x) = sin2x$; в) $g(x) = \sqrt{3}x+7$; г) $g(x) = 2x+3$.

20. Сравнить.

а) $f'(0)$ и $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$; б) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ и $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $f(x) = tgx$, $g(x) = ctgx$.

21. Найти область определения и производную функции.

а) $y = (x^2-1)\sqrt{x}$; б) $y = \frac{3x}{\sqrt{x-3}}$; в) $y = \frac{\sqrt{2-x}}{1-x}$.

22. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2-2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

23. Дана кривая $y = -x^2+1$. Найти точку её графика, в которой касательная параллельна прямой $y = 2x+3$.

24. Найти координаты точки, в которой касательная к графику функции $y = x^2-x-12$ образует с осью Ox угол $5°$.

25. Под каким углом ось Ox пересекает параболу $y = x^2+x$?

26. Составить уравнение касательной к графику функции $y = cosx$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

27. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе.

а) $y = -x^2+x$ в точке $x_0 = -2$; б) $y = x^2-3x+2$ в точке $x_0 = 3$.

28. *Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^3$, $x\geq 0$, которая отсекает на осях координат треугольник площадью $\frac{2}{3}$.

29. Материальная точка двигается по закону $s(t) = t^2-4t+2$. В какой момент времени скорость равна: а) 0; б) 6?

30. Найти скорость и ускорение в данный момент времени для точки, которая двигается прямолинейно по закону:

а) $S(t) = 2t^2-3t$; $t = 1$; б) $S(t) = t^2+2t+1$; $t = 3$; в) $S(t) = 2t^2-3t+4$; $t = 2$.

31. Две материальные точки двигаются прямолинейно по законам $S_1 = 2,5t^2-6t+1$ и $S_2(t) = 0,5t^2+2t-3$. В какой момент времени их скорости равны?

32. Тело массой $m = 5$ кг двигается прямолинейно по закону $S(t) = t^2+2$ (S — путь в метрах, t — время в секундах). Найти кинетическую энергию тела через 2 с после начала движения.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-1-1

Тема. Обобщение и систематизация знаний

В-I	**7 баллов**	**В-II**
	1. Решить неравенство.	
$\frac{3x+1}{3x-6} > 0.$		$\frac{x^2-4}{x+3} < 0.$
	2. Найти область определения функции.	
а) $y = \sqrt{x-1}$; б) $y = \frac{1}{\sin 2x}$.		а) $y = \sqrt{5-10x}$; б) $y = \frac{1}{\cos\frac{x}{3}-1}$.
	3. Построить график функции.	
$y = \frac{x^2-9}{x-3}.$		$y = \frac{16-x^2}{x+4}.$

В-III	**9 баллов**	**В-IV**
	1. Решить неравенство.	
$\frac{5}{6x^2-x-1} > 0.$		$\frac{3x+1}{x^2+x+1} \geq 0.$
	2. Найти область определения функции.	
а) $y = \sqrt{\sin 2x - \frac{1}{2}}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{3}+2\cos x}$.		а) $y = \sqrt{\sqrt{2}-2\cos\left(-\frac{x}{2}\right)}$; б) $y = \frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{\sin x-\sqrt{3}\cos x}$.
	3. Построить график функции.	
$y = \frac{x^2+2x+1}{x+1}.$		$y = \frac{x^2+x-12}{x+4}.$

В-V	**12 баллов**	**В-VI**
	1. Решить неравенство.	
$\frac{\sqrt{x+4}}{x^2-1} \geq 0.$		$\frac{\sqrt{5-x}}{x^2-4} \leq 0.$
	2. Найти область определения функции.	
а) $y = \sqrt{\frac{1}{x}-1}$; б) $y = \log_2(x^2-4x-5)$; в) $y = \arcsin(2x-3)+\sqrt{3-x}$.		а) $y = \sqrt{2+\frac{x}{1-x}}$; б) $y = \log_3(-3x^2-7x-2)$; в) $y = \arcsin\frac{x}{2\pi}+\sqrt{\cos 2x}$.
	3. Построить график функции.	
$y = \frac{x+2}{\lvert x+2\rvert}.$		$y = \frac{\lvert x-2\rvert}{x-2}.$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-1-2

Тема. Модуль числа. Предел. Непрерывность

В-I	7 баллов	В-II
1. Решить неравенство.		
$\lvert x+0,8\rvert \le 3,2$.		$\lvert 8+x\rvert \ge 6$.
2. Найти область определения функции.		
$y = lg(x^2-9)$.		$y = lg(16-x^2)$.
3. Найти предел функции.		
а) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-3x^2-7)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$. б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$;		а) $\lim\limits_{x\to -2}(2x^3-3x^2+6)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}$. б) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{9-x^2}{x+3}$;

В-III	9 баллов	В-IV
1. Решить неравенство.		
$\lvert 3x-2\rvert > 2x+1$.		$\lvert 4x^2-1\rvert < x+2$.
2. Найти область определения функции.		
$y = \sqrt{1-\frac{1}{x+2}}$.		$y = \sqrt{\frac{2}{x-1}-1}$.
3. Найти предел функции.		
а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x}{x^3-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{6x}$.		а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3-2x^2}{x^3-x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin\frac{x}{3}}$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Решить неравенство.		
$\lvert 4x-1\rvert \ge \lvert 2x+3\rvert$.		$\lvert 2x-1\rvert < \lvert 3x+1\rvert$.
2. Решить уравнение.		
$\lvert x^2-x-6\rvert = x^2-x-6$.		$\left\lvert\frac{x^2-10x+21}{x^2-12x+32}\right\rvert = -\frac{x^2-10x+21}{x^2-12x+32}$.
3. Найти область определения функции.		
$y = \sqrt{(3-2x)\log_{0,7}x}$.		$y = \sqrt{(3x-6)\log_{0,5}x}$.
4. Найти предел функции.		
а) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(-x^3+9x^2+x-1)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 4x}{x^2}$.		а) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(4x^4-3x^3+7x+1)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 10x-\cos x}{4x^2}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-1-3

Тема. Производная. Техника дифференцирования

В-I	7 баллов	В-II
1. Найти значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.		
$y = x^2 + 5,$ $x_0 = 3.$		$f(x) = 5x^3 + 2,$ $x_0 = -1.$
2. Найти производную функции.		
а) $y = 2x^5 + \sqrt{x} - \frac{1}{x} + 2\cos x$; б) $y = x^2 \sin x$; в) $y = \frac{6x}{\cos x}$.		а) $y = 4x^6 + 7x^2 - 6x + \frac{1}{x^4}$; б) $y = \sqrt{x}\cos x$; в) $y = \frac{\sin x}{x^3}$.

В-III	9 баллов	В-IV
1. Найти значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.		
$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 3,$ $x_0 = 3.$		$f(x) = \frac{3}{x^2} + 5x - 2\sqrt{x} + 4,$ $x_0 = 1.$
2. Найти производную функции.		
а) $y = 4x^2 + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}$; б) $y = (3x+1)\sin x$; в) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.		а) $y = \frac{2}{x^{10}} - \frac{1}{2x^{20}} + \frac{1}{x^{30}}$; б) $y = \sin x(x^2 - 2x - 3)$; в) $y = \frac{\sqrt{x} + 2x}{x}$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Найти значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.		
$f(x) = -\frac{2}{3}\sin x + \frac{x^3}{\pi^2} - 3,$ $x_0 = \frac{\pi}{3}.$		$f(x) = ctg x + \frac{12x^3}{\pi^2},$ $x_0 = \frac{\pi}{6}.$
2. Найти производную функции.		
а) $y = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{5x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}}$; б) $y = (x^3 - 5x - 1)(x^2 + 2x + 8)$; в) $y = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$.		а) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{x^3} + x\sqrt{x}$; б) $y = (x^5 - x + 2)(x^3 - 3x^2 + 1)$; в) $y = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-1-4

Тема. Производная сложной функции

В-I	**7 баллов**	**В-II**
1. Найти производную функции.		
а) $y = (8x+5)^3$; в) $y = sin 7x$. б) $y = \sqrt{3x-5}$;		а) $y = \left(\frac{x}{4}-7\right)^4$; в) $y = cos\left(-\frac{x}{4}\right)$. б) $y = \sqrt{-5x+4}$;
2. Решить уравнение $f'(x) = 0$; неравенство $f'(x) > 0$, если:		
$f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + sin x$.		$f(x) = cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

В-III	**9 баллов**	**В-IV**
1. Найти производную функции.		
а) $y = (x^2-3x)^6$; в) $y = \frac{2}{x^2-3x}$. б) $y = \sqrt{sin 7x - 5x}$;		а) $y = \left(\frac{1}{5}x^5-7\right)^3$; в) $y = \frac{2}{(4x-5)^3}$. б) $y = \sqrt{x^2 + cos 3x}$;
2. Решить уравнение $f'(x) = 0$; неравенство $f'(x) > 0$, если:		
$f(x) = cos 2x - \frac{1}{2}x$.		$f(x) = sin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}x$.

В-V	**12 баллов**	**В-VI**
1. Найти производную функции.		
а) $y = \frac{4}{(x^5-1)^5}$; в) $y = sin^3 3x$. б) $y = \sqrt{tg 2x}$;		а) $y = \frac{-10}{(x^2-3x)^4}$; в) $y = sin^3 5x^2$. б) $y = \sqrt{ctg\frac{x}{4}}$;
2. Найти наибольшее целое решение неравенства.		
$\frac{f'(x)}{(x+5)(x-6)} \le 0$, если $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.		$\frac{f'(x)}{(x-4)(x+5)} \le 0$, если $f(x) = x^3 - 12x + 7$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-1-5

Тема. Механический и геометрический смысл производной

В-I	7 баллов	В-II
1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 3$. Вычислить её скорость в момент времени $t = 4$ с.		1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2$. Вычислить её скорость в момент времени $t = 5$ с.
2. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 6x + 5$ в точке с абсциссой $x = 4$.		2. Составить уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 5x - 3$ в точке с абсциссой $x = 2$.
3. Вычислить острый угол, под которым парабола $y = x^2 - 4$ пересекает ось абсцисс.		3. Вычислить острый угол, под которым парабола $y = x^2 - 9$ пересекает ось абсцисс.
В-III	**9 баллов**	**В-IV**
1. Скорость точки, которая движется прямолинейно, задана уравнением $v = 2t^2 - 5t + 6$. В какой момент времени ускорение точки будет равно 2 м/с^2?		1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3$. Вычислить её ускорение в момент времени $t = 3$ с.
2. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 + 6x + 8$ в точке с абсциссой $x = -2$.		2. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 + 2x - 8$ в точке с абсциссой $x = 2$.
3. Найти острый угол между параболами $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$ в точке их пересечения, имеющей положительную абсциссу.		3. Найти острый угол между параболами $y = x^2$ и $y = 8 - x^2$ в точке их пересечения, имеющей положительную абсциссу.
В-V	**12 баллов**	**В-VI**
1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении двух тел задана уравнениями: $S_1 = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 45$; $S_2 = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 115$. В какой момент времени скорости их движения будут равными?		1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении двух тел задана уравнениями: $S_1 = \frac{2}{3}t^3 + t^2 - t + 14$; $S_2 = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 11t - 8$. В какой момент времени скорости их движения будут равными?
2. Составить уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 12x + 20$ в точке с абсциссой $x = 4$.		2. Составить уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 12x + 16$ в точке с абсциссой $x = 5$.
3. Найти острый угол между параболами $y = -3x^2$ и $y = x^2 - 4$ в точке их пересечения, имеющей положительную абсциссу.		3. Найти острый угол между параболами $y = x^2 - 2$ и $y = -x^2 + 6$ в точке их пересечения, имеющей положительную абсциссу.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-1-1

Тема. Предел. Производная. Техника дифференцирования

<table>
<tr><th>В-I</th><th>7 баллов</th><th>В-II</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Вычислить предел функции.</td></tr>
<tr><td colspan="2">а) $\lim\limits_{x\to1}(x^3-3x^2-2)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+1}{x-1}$.</td><td>а) $\lim\limits_{x\to-2}(2x^4+5x-1)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{x}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Найти производную функции.</td></tr>
<tr><td colspan="2">а) $y = tgx+\sqrt{x}$; б) $y = \frac{x^2+3}{x+1}$.</td><td>а) $y = \frac{1}{x}-ctgx$; б) $y = \frac{x^2-3}{x-2}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Найти производную функции $y = f(x)$ и вычислить её значение в точке $x = x_0$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = sinx cos2x + cosx sinx2x,\ \ x_0 = \pi$.</td><td>$y = cosx cos3x + sinx sin3x,\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. Составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$
в точке с абсциссой x_0.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = x^2+4,\ x_0 = 2$.</td><td>$y = x^2-2x-3,\ x_0 = -1$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>В-III</th><th>9 баллов</th><th>В-IV</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Вычислить предел функции.</td></tr>
<tr><td colspan="2">а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+9}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$.</td><td>а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{3+x}{x^2+9}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{x^2-\frac{1}{4}}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Найти производную функции.</td></tr>
<tr><td colspan="2">а) $y = (2x-3)^2$; б) $y = \frac{x^2+3}{2-x}$.</td><td>а) $y = (4-3x)^2$; б) $y = \frac{1+x}{4-x^2}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Найти производную функции $y = f(x)$ и вычислить её значение в точке $x = x_0$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = sin4x cos4x,\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$.</td><td>$y = tg\frac{x}{2}-ctg\frac{x}{2},\ x_0 = \frac{\pi}{3}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. Составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$
в точке с абсциссой x_0.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = x^3-x^2,\ x_0 = -1$.</td><td>$y = x^3+x^2,\ x_0 = 1$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>В-V</th><th>12 баллов</th><th>В-VI</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Вычислить предел функции.</td></tr>
<tr><td colspan="2">а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+4}{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x+1}$.</td><td>а) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x-2}{x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{x^2-\frac{1}{9}}{1+3x}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Найти производную функции.</td></tr>
<tr><td colspan="2">а) $y = (\sqrt{x-2}+2)^2$; б) $y = \frac{x^2-3}{5+x^2}$.</td><td>а) $y = (2-\sqrt{x+2})^2$; б) $y = \frac{x^2+2}{1-x^2}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Найти производную функции $y = f(x)$ и вычислить её значение в точке $x = x_0$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = sinx cos3x,\ \ x_0 = \pi$.</td><td>$y = \frac{sin6x}{1+cos6x},\ \ x_0 = \frac{\pi}{12}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Составить уравнение касательной к кривой $y = x^2-6x+2$, которая проходит параллельно прямой $y = -2x+8$.</td><td>4. К графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ составить уравнение касательной, которая параллельна прямой $y = -x+2$.</td></tr>
</table>

$\lvert f(x)\rvert = b \Rightarrow \begin{cases} b<0, & x\in\varnothing, \\ b=0, & f(x)=0, \\ b>0; & \left[\begin{array}{l} f(x)=b, \\ f(x)=-b. \end{array}\right. \end{cases}$	Решить уравнение. $\lvert 5x^2-3\rvert = 2$. Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\left[\begin{array}{l} 5x^2-3=2; \\ 5x^2-3=-2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2=1; \\ x^2=\frac{1}{5}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\pm 1; \\ x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}. \end{array}\right.$ Ответ: ± 1; $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\lvert f(x)\rvert = g(x)$	
I способ	**II способ**
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ f(x)=g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ -f(x)=g(x). \end{cases} \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)=g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)=-g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

Решить уравнение.	$\lvert x^2+x-1\rvert = 2x-1$.

Решение.

Уравнение равносильно совокупности систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1\ge 0; \\ x^2+x-1=2x-1; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1\ge 0; \\ x^2+x-1=-(2x-1); \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge \frac{1}{2}; \\ x^2-x=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge \frac{1}{2}; \\ x^2+3x-2=0. \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge \frac{1}{2}; \\ \left[\begin{array}{l} x=0; \\ x=1; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge \frac{1}{2}; \\ x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; \\ x=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: 1; $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Решить уравнение.	$\lvert 3x-4\rvert = 4x^2+3x-2$.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-4\ge 0,\\ 3x-4 = 4x^2+3x-2;\end{cases}\\ \begin{cases}3x-4<0,\\ 4-3x = 4x^2+3x-2;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge \dfrac{4}{3},\\ 4x^2 = -2;\end{cases}\\ \begin{cases}x<\dfrac{4}{3},\\ 4x^2+6x-6 = 0;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\ \begin{cases}x<\dfrac{4}{3}\\ 2x^2+3x-3 = 0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$$

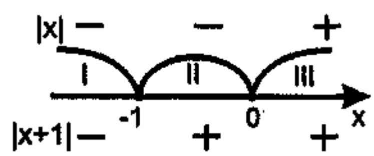
$$\Rightarrow \begin{cases}x<\dfrac{4}{3}\\ x = \dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{4}\end{cases} \Rightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{33}}{4}.$$

Ответ: $x = \dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$.

Решить уравнение.	$\lvert x\rvert - 2\lvert x+1\rvert = 5$.

Решение.

Нули подмодульных выражений: $\left[\begin{array}{l}x = 0;\\ x+1 = 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = 0;\\ x = -1.\end{array}\right.$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1;\\ -x+2x+2 = 5;\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x\le 0,\\ -x-2x-2 = 5;\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ x-2x-2 = 5;\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1;\\ x = 3;\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x\le 0;\\ -3x = 7;\end{cases}\\ \begin{cases}x>0;\\ -x = 7.\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing;\\ x\in\varnothing;\\ x\in\varnothing;\end{array}\right. \Rightarrow x\in\varnothing.$$

Ответ: уравнение не имеет решений.

$\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert$	
I способ	**II способ**
Возвести левую и правую части в квадрат и решить полученное уравнение.	$\left[\begin{array}{l}f(x) = g(x);\\ f(x) = -g(x).\end{array}\right.$

Решить уравнение.	$\lvert 2x-3\rvert = \lvert 2x+7\rvert$.

Решение.

Возведем обе части в квадрат и решим полученное уравнение:

$4x^2-12x+9 = 4x^2+28x+49,$

$-12x-28x = 49-9,$

$-40x = 40,$

$x = -1.$

Ответ: $x = -1$.

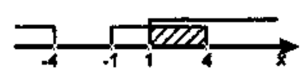
Решить уравнение.	$\lvert 2x^2-4\rvert = \lvert 4-3x^2\rvert$.
Решение.	
$\left[\begin{array}{l}2x^2-3 = 4-3x^2;\\ 2x^2-3 = 3x^2-4;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}5x^2 = 7;\\ x^2 = 1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2 = \frac{7}{5};\\ x = \pm 1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \pm\sqrt{\frac{7}{5}};\\ x = \pm 1.\end{array}\right.$	
Ответ:	$\pm 1;\ \pm\sqrt{\frac{7}{5}}$.

$$\lvert f(x)\rvert = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \ge 0\\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0\end{cases}$$

Решить уравнение.	$\lvert x^2+x-12\rvert = x^2+x-12$.
Решение.	
Используем определение модуля:	$x^2+x-12 \ge 0$ $(x+4)(x-3) \ge 0$ 
Ответ:	$x \in (-\infty;-4] \cup [3;+\infty)$.
Решить уравнение.	$\lvert cosx\rvert = -cosx$.
Решение.	
Используем определение модуля:	$cosx \le 0$ $\frac{\pi}{2}+2\pi n \le x \le \frac{3\pi}{2}+2\pi n,\quad n \in Z.$
Ответ:	$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right],\quad n \in Z.$

$$\lvert f(x)\rvert < a \Leftrightarrow -a < fx < a$$

$$\lvert f(x)\rvert < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x)\\ f(x) > -g(x)\end{cases}$$

Решить неравенство.	$\lvert 3x-5\rvert < 2$.
Решение.	
Заменим двойным неравенством:	$-2 < 3x-5 < 2,$ $3 < 3x < 7,$ $1 < x < \frac{7}{3}.$
Ответ:	$\left(1;\frac{7}{3}\right)$.
Решить неравенство.	$\lvert x^2-4\rvert < 3x$.
Решение.	
$\begin{cases}x^2-4 < 3x,\\ x^2-4 > -3x;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-3x-4 < 0;\\ x^2+3x-4 > 0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-4)(x+1) < 0;\\ (x+4)(x-1) > 0;\end{cases}$ $\begin{cases}-1 < x < 4;\\ \left[\begin{array}{l}x > 1;\\ x < -4.\end{array}\right.\end{cases}$  $x \in (1;4)$	
Ответ:	$(1;4)$.

$$|f(x)| > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$$

Решить неравенство.	$\lvert x^2 - x - 3\rvert > 9$.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 3 > 9, \\ x^2 - x - 3 < -9; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 12 > 0 \\ x^2 - x + 6 < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x-4)(x+3) > 0 \\ x \in \varnothing \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < -3 \end{array}\right.$$

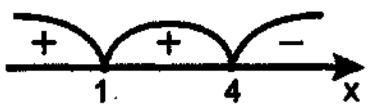
Ответ:	$(-\infty;-3) \cup (4;+\infty)$.

Решить уравнение.	$\lvert 4 - x\rvert + \lvert 2x - 2\rvert = 5 - 2x$.

Решение.

Точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$ разбивают числовую ось на три интервала.

$y = 4 - x$



$y = 2x - 2$

а) $\begin{cases} x < 1 \\ 4 - x - 2x + 2 = 5 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing,$

б) $\begin{cases} 1 \le x < 4 \\ 4 - x + 2x - 2 = 5 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x < 4 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1,$

в) $\begin{cases} x \ge 4 \\ x - 4 + 2x - 2 = 5 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ x = \dfrac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing.$

Здесь пункт в) можно было не выполнять, т.к. по условию $5 - 2x \ge 0$, следовательно, $x \le \frac{5}{2}$.

Ответ:	1.
Решить уравнение.	$\lvert x - a\rvert = 3x - 1$, где a — параметр.

Решение.

Равносильная совокупность систем:

$\begin{cases} x - a = 3x - 1 \\ 3x - 1 \ge 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} -x + a = 3x - 1 \\ 3x - 1 \ge 0 \end{cases}$.

Корни уравнений $x_1 = \frac{1-a}{2}$ и $x_2 = \frac{a+1}{4}$. Из условия $3x - 1 \ge 0$ найдём a.

а) $3 \cdot \frac{1-a}{2} - 1 \ge 0 \Rightarrow a \le \frac{1}{3}$; б) $3 \cdot \frac{a+1}{4} - 1 \ge 0 \Rightarrow a \le \frac{1}{3}$.

Отметим, что при $a = \frac{1}{3}$ $\quad x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$.

Ответ:	$\frac{1-a}{2}$, если $a \le \frac{1}{3}$; $\frac{a+1}{4}$, если $a > \frac{1}{3}$.

Решить уравнение.	$\lvert x+a\rvert = \lvert 2x-a\rvert$, где a — параметр.

Решение.

Обе части уравнения неотрицательны, поэтому обе части уравнения возведём в квадрат. Имеем $(x+a)^2 = (2x-a)^2$, отсюда $3x^2-6ax = 0$. Находим $x_1 = 0,\ x_2 = 2a$.

Ответ: $0;\ 2a$.

Решить неравенство.	$\lvert x-a\rvert < 2x-1$, где a — параметр.

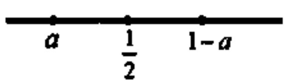
Решение.

$x-a = 0$ при $x = a$. Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

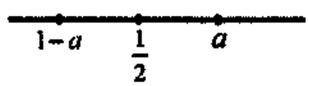
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge a;\\ x-a<2x-1;\\ 2x-1>0,\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x<a;\\ -x+a<2x-1;\\ 2x-1>0.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge a;\\ x>1-a;\\ x>\dfrac{1}{2},\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x<a;\\ x>\dfrac{a+1}{3};\\ x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим каждую систему отдельно.

1) $\begin{cases}x \ge a;\\ x>1-a;\\ x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

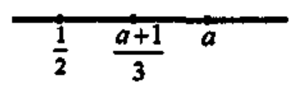
$a = 1-a$ при $a = \dfrac{1}{2}$. Если $a \le \dfrac{1}{2}$, то размещение точек $a,\ \ 1-a,\ \ \dfrac{1}{2}$ на числовой оси следующее: 

Решением системы является множество $x > 1-a$.

Если $a > \dfrac{1}{2}$, то получим 

Следовательно, решением системы является множество $x \ge a$.

2) $\begin{cases}x<a;\\ x>\dfrac{a+1}{3};\\ x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

$a = \dfrac{a+1}{3}$ при $a = \dfrac{1}{2}$. Если $a \le \dfrac{1}{2}$, то решений нет, так как первое и третье неравенства не совпадают. Если $a > \dfrac{1}{2}$, то размещение точек следующее: 

Получим $\dfrac{a+1}{3} < x < a$.

Объединяем решения двух систем неравенств.

Ответ:	$(1-a;+\infty)$, если $a \le \dfrac{1}{2}$; $\left(\dfrac{a+1}{3};+\infty\right)$, если $a > \dfrac{1}{2}$.

Решить неравенство.	$\lvert 3x-1\rvert < \lvert 4x-a\rvert$, где a — параметр.

Решение.

Возведем обе части неравенства в квадрат:

$9x^2-6x+1<16x^2-8ax+a^2$ или $7x^2-2(4a-3)x+a^2-1>0$.

Найдём дискриминант левой части.

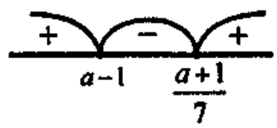
Имеем: $D_1 = (4a-3)^2-7(a^2-1) = 9a^2-24a+16 = (3a-4)^2$.

Следовательно, корни квадратного трехчлена:

$x_{1,2} = \dfrac{(4a-3)\pm\lvert 3a-4\rvert}{7}$, то есть $x_1 = a-1$, $x_2 = \dfrac{a+1}{7}$.

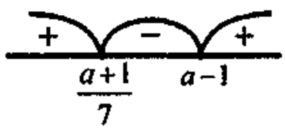
Рассмотрим размещение корней x_1 и x_2 на числовой оси в зависимости от значения параметра a. $a-1 = \dfrac{a+1}{7}$ при $a = \dfrac{4}{3}$.

1) $a<\dfrac{4}{3}$



$\left[\begin{array}{l} x<a-1; \\ x>\dfrac{a+1}{7}. \end{array}\right.$

2) $a>\dfrac{4}{3}$



$\left[\begin{array}{l} x<\dfrac{a+1}{7}; \\ x>a-1. \end{array}\right.$

3) $a = \dfrac{4}{3}$. В этом случае заданное неравенство имеет вид $\lvert 3x-1\rvert < \left\lvert 4x-\dfrac{4}{3}\right\rvert$ или $\lvert 3x-1\rvert < \dfrac{4}{3}\lvert 3x-1\rvert$. Оно выполняется, при $x\neq\dfrac{1}{3}$.

Ответ:	$(-\infty;a-1)\cup\left(\dfrac{a+1}{7};+\infty\right)$, если $a<\dfrac{4}{3}$; $\left(-\infty;\dfrac{a+1}{7}\right)\cup(a-1;+\infty)$, если $a\geq\dfrac{4}{3}$.

Вычислить производную функции.	$y = (1+sin^2x)^{-\frac{1}{2}}$.

Имеем: $y' = \left((1+sin^2x)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\dfrac{1}{2}(1+sin^2x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1+sin^2x)' =$

$= -\dfrac{1}{2}(1+sin^2x)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2sinx\cdot(sinx)' = -\dfrac{1}{2}(1+sinx^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2sinx\,cosx =$

$= -\dfrac{1}{2}(1+sin^2x)^{-\frac{3}{2}}\,sin2x.$

Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = \frac{x}{2x-1}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение.

Составим уравнение касательной:

$$y' = \frac{1\cdot(2x-1)-2\cdot x}{(2x-1)^2},\quad y' = -\frac{1}{(2x-1)^2},\quad y'(1) = -1.$$

Уравнение касательной имеет вид $y-1 = -1(x-1) \Leftrightarrow y = -x+2$. Полученная прямая пересекает координатные оси в точках $x_1 = 0,\ y_1 = 2,\ y_2 = 0,\ x_2 = 2$. Поскольку координатные оси взаимно перпендикулярны, то треугольник является прямоугольным. Оба катета равны 2. Имеем $S\Delta = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$.

Ответ: $S\Delta = 2$.

К параболе $y = 3x^2-5x+8$ в некоторой точке проведена касательная под углом $5°$ к оси абсцисс. Найти точку касания.

Решение.

Пусть $M(x_0, y_0)$ является точкой касания. Точка M принадлежит кривой $y = 3x^2-5x+8$, следовательно, имеем $y_0 = 3x_0^2-5x_0+8$ (1). По условию $y'(x_0) = 1$ ($tg45° = 1$). Но $y' = 6x-5$. Следовательно, $y'(x_0) = 6x_0-5$, $6x_0-5 = 1$ (2).

Решая систему уравнений (1) и (2), находим: $x_0 = 1,\ y_0 = 6$.

Ответ: $M(1, 6)$.

Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{x^3+1}{x}$ в точке пересечения его с осью абсцисс.

Решение.

Находим точку пересечения графика с осью Ox. Допустим, $y = 0$, тогда $\frac{x^3+1}{x} = 0$.

Отсюда $x^3+1 = 0$, то есть $x = -1$. Следовательно, $M(-1, 0)$.

Находим k: $y' = \left(\frac{x^3+1}{x}\right)' = \left(x^2+\frac{1}{x}\right)' = 2x-\frac{1}{x^2} \Rightarrow y'(-1) = -2-1 = -3.$

Следовательно, $k = -3$. Отсюда вытекает, что уравнение касательной — это $y = 0 = -3(x-(-1)) = -3(x+1)$.

Ответ: $y = -3(x+1)$.

Тело, выпущенное вертикально вверх, двигается по закону $h(t) = 8t-5t^2$. Найти скорость тела в момент столкновения с землей.

Решение.

На земле $h = 0$, то есть $0 = 8t-5t^2$. Отсюда $t_1 = 0,\ t_2 = \frac{8}{5}$. То есть тело столкнется с землей через $\frac{8}{5}$с. Находим скорость тела: $v = h'$, то есть, $v = (8t-5t^2)' = 8-10t$.

Следовательно, при $t = \frac{8}{5}$с имеем $v = 8-\frac{10\cdot 8}{5} = -8$ (м/с).

Ответ: -8 м/с.

Материальная точка двигается прямолинейно по закону $S = 60t - 5t^3$. Через какое время после начала движения точка остановится? Найти расстояние, пройденное точкой до остановки.
Решение.
К моменту остановки скорость точки равна нулю. Находим v: $v = (60t - 5t^3)' = 60 - 15t^2$. Решим уравнение $60 - 15t^2 = 0$, то есть, $t^2 = 4 \Rightarrow t_{1,2} = \pm 2$. После начала движения, как выяснилось, точка остановится через $t_1 = 2$ с. Расстояние, пройденное точкой до остановки, составит $S = 60 \cdot 2 - 5 \cdot 2^3 = 120 - 40 = 80$ м.
Ответ: 2 с, 80 м.
Найти сумму: $1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + 100 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{99}$.
Решение.
Рассмотрим функции $g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 100x^{99}$ и $f(x) = x + x^2 + \ldots + x^{100}$. $f'(x) = g(x)$. $f(x)$ — сумма геометрической прогрессии. $f(x) = \frac{x \cdot (1 - x^{100})}{1 - x} = \frac{x - x^{101}}{1 - x}$. $g(x) = f'(x) = \left(\frac{x - x^{101}}{1 - x}\right)' = \frac{(1 - 101x^{100}) \cdot (1 - x) + (x - x^{101})}{(1 - x)^2} = \frac{1 - 102x^{100} + 101x^{101}}{(1 - x)^2}$. $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1 - 102\left(\frac{1}{3}\right)^{100} + 101 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{101}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{4}(9 - 205 \cdot 3^{-99})$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ АБИТУРИЕНТА

1. Решить уравнение.

а) $|2x - 5| = 3x + 2$; д) $|2x^2 + x| = 4 - x$; и) $|x - 1| + |x - 2| = |x - 3| + 4$;

б) $|4x - 5| - |2 - x| = 0$; е) $|2x^2 - 3x| = 3x + 4$; к) $|1 - x^2| = 3$;

в) $|x + 3| + |5 - 2x| = 2 - 3x$; ж) $|2x - 1| + |x + 3| = 0$; л) $|3x^2 - x| = 8 + x$;

г) $x^2 + |6 - x| = 4$; з) $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$; м) $|x^2 - 6|x| + 4| = 1$.

2. Решить уравнение с параметром: а) $|2x + a| = 4a - x$; б) $|4x - 2a| = |x + 3a|$.

3. Решить неравенство.

а) $|3x - 5| > 9x + 1$; д) $||x - 1| - 2| > 1$; и) $\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x$; н) $|||x + 1| + 4| - 5| \leq 4$;

б) $\left|\frac{3x + 1}{x - 5}\right| \geq 1$; е) $\frac{|x - 2|}{|x - 1| - 1} < 1$; к) $\frac{|x + 3|}{x^2 + 5x + 6} > 2$; о) $||x^2 - 6|x|| - 4| \geq 4$.

в) $\left|\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}\right| \leq 1$; ж) $||x^2 - |x|| - 4| \leq 2$; л) $|2x - 1| - |x - 4| > 4$;

г) $|x^3 - 1| \geq 1 - x$; з) $|2x - 5| \leq x$; м) $|x - 1| + |x - 2| \geq x + 3$;

3*. Решить неравенство (a — параметр)

а) $|x - 2a| < 4x - 2$; б) $|5x - 3| < |2x - a|$.

4. Найти производную функции.

а) $y = 3\sin 2x \cdot tg\sqrt{x}$; б) $y = x^3\sqrt[3]{x^3 + 1}$.

5. Решить неравенство $f'(x) < g'(x)$, если $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$, $g(x) = 5x + \frac{1}{x}$.

6. Найти сумму $x + x^2 + \ldots + x^n$, а затем сумму $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

7. Составить уравнения касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, которые проходят через точку $M(2, -5)$. Сделать рисунок.

8. $S(t) = 8 - 2t + 24t^2 - 0,3t^5$. В какой момент времени тело имеет наибольшую скорость? Найти эту скорость.

9. Радиус шара R равномерно возрастает со скоростью 2 см/с. С какой скоростью возрастает объём шара? Найти эту скорость в момент, когда R достигнет 10 см ($R = 0$ при $t = 0$).

10. При каких x производная функции $y = 3(sinx + \sqrt{3}cosx)$ равна 0?

11. Касательная проведена в некоторой точке к кривой $y = x^4 - 4x$ параллельно оси абсцисс. Найти точку касания.

12. Найти касательную, проведенную к кривой $y = 2x^5 - 5x^2$ в точке, абсцисса которой равна -1.

13. При каких значениях a и b прямая $y = 7x - 2$ касается графика функции $y = ax^2 + bx + c$ в точке $A(1;5)$?

14. Под каким углом пересекаются графики функции $y = 8 - x$ и $y = 4\sqrt{x+4}$?

15. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = x^2 - 4x + 3$ в точке $M(0;3)$.

16. Точка двигается по закону $S = 3t^4 - 4t^3$. Найти скорость и ускорение точки через 2 с после начала движения.

17. Угол φ (рад) оборота тела вокруг оси изменяется от времени t по закону $\varphi(t) = 3t^2 - 2t - 4$. Вычислить угловую скорость в произвольный момент времени t и установить, при каком значении t (с) она будет равна 40 рад/с.

18. Количество электрического тока, который проходит через проводник, начиная с момента $t = 0$, задаётся формулой $Q = 2t^3 + 3t + 1$ (кул). Найти силу тока в конце 5-й секунды.

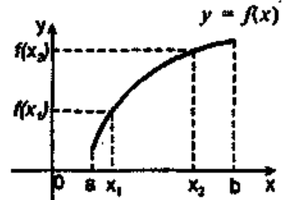
19. Тело массой m_0 двигается прямолинейно по закону $S = at^2 + bt + c$ ($, b, c$ — постоянные). Доказать, что сила, которая действует на тело, постоянна.

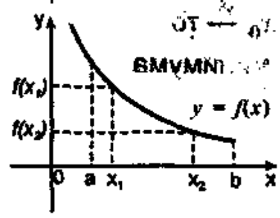
20. Человек, рост которого , 8м, удаляется от источника света, находящегося на высоте 12 м, со скоростью 50 м/мин. С какой скоростью передвигается тень от его головы?

§2. Применение производной

Возрастание и убывание функции на промежутке

Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке (a, b)	$\Leftrightarrow$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in (a, b)$
Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке (a, b)	$\Leftrightarrow$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in (a, b)$





Достаточный признак возрастания, убывания функции

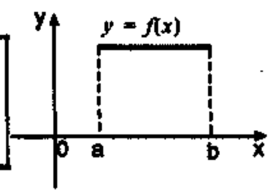
Если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$, $\Longrightarrow$ функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке (a, b).

Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a, b)$, $\Longrightarrow$ функция $y = f(x)$ убывает на промежутке (a, b).

Если функция непрерывна в конце промежутка, то его можно присоединить к промежутку возрастания (убывания) функции.

Достаточное и необходимое условие постоянства функции

Если $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, $\Longleftrightarrow$ функция $y = f(x)$ постоянная на промежутке (a, b).

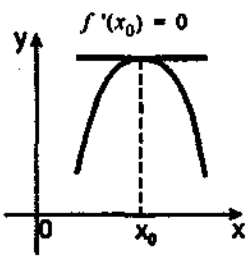


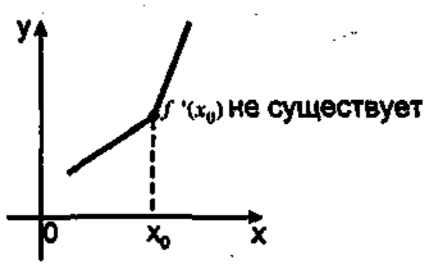
Критические точки функции

$y = f(x)$ — непрерывная функция.

x_0 — внутренняя точка её области определения.

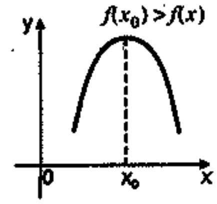
Если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, $\Longrightarrow$ x_0 — критическая точка.

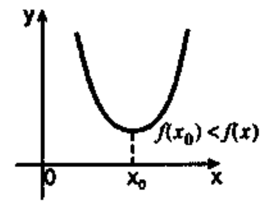




Точки экстремума

x_0 — точка максимума	$\Leftrightarrow$	Вблизи точки x_0 $f(x_0)$ — наибольшее значение.
x_0 — точка минимума	$\Leftrightarrow$	Вблизи точки x_0 $f(x_0)$ — наименьшее значение.

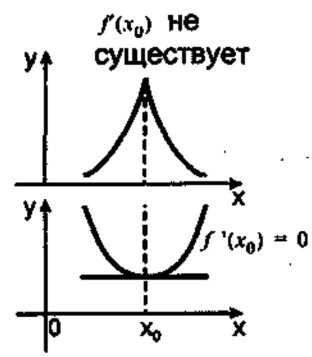




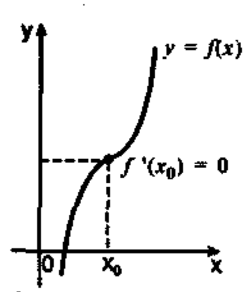
x_0 — точка максимума	точки экстремума	x_0 — точка минимума
$f(x_0)$ — максимум функции	экстремумы функции	$f(x_0)$ — минимум функции

Необходимый признак экстремума

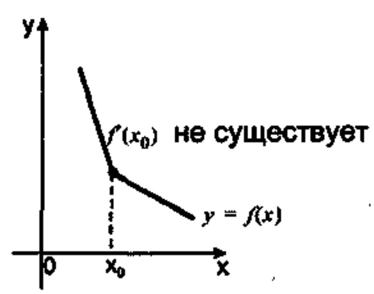
Если $\boxed{x_0 \text{ — точка экстремума,}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ или } f'(x_0) \text{ не существует.}}$



Точки экстремума нужно искать только среди критических точек, но не каждая точка, в которой $f'(x_0) = 0$ или не существует, является точкой экстремума.



$f'(x_0) = 0$, но x_0 — не является точкой экстремума.

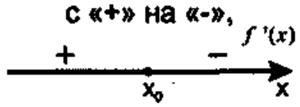
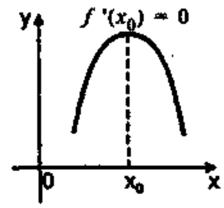
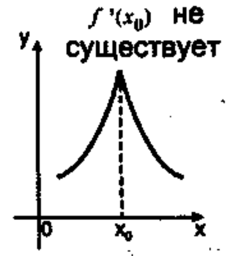
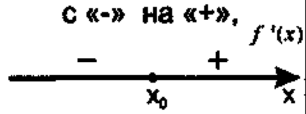
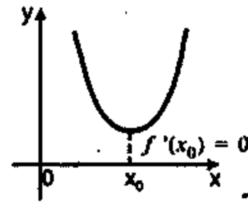
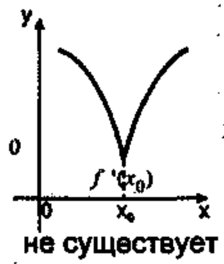


$f'(x_0)$ не существует, но x_0 — не является точкой экстремума.

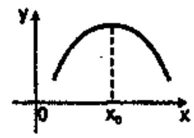
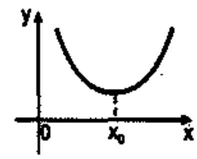
Достаточный признак экстремума функции

Первый признак

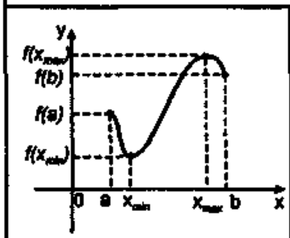
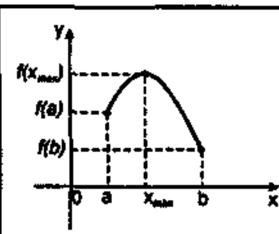
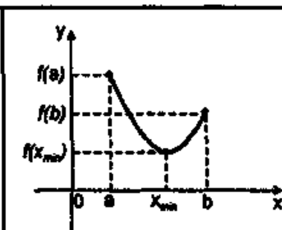
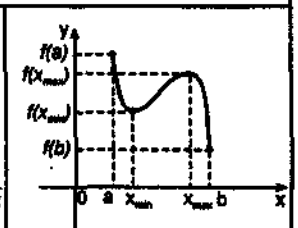
Если x_0 — критическая точка, $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует.

Если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ изменяет знак с «+» на «-», 	$\Leftrightarrow$	x_0 — точка максимума.	 
Если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ изменяет знак с «-» на «+», 	$\Leftrightarrow$	x_0 — точка минимума.	 

Второй признак

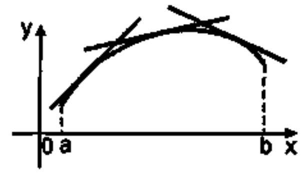
$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	x_0 — точка максимума.	
$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	x_0 — точка минимума.	

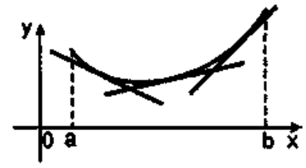
Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке

Свойство			
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и имеет на нём конечное число критических точек, то она принимает свои наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке или в критических точках, которые принадлежат этому отрезку, или на концах отрезка.			
Примеры			
			
$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{max})$ $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{min})$	$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{max})$ $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$	$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{min})$	$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$
Если функция $y = f(x)$ на промежутке x имеет только одну точку экстремума $x = a$ и если это точка максимума, то $f(a)$ — наибольшее значение функции на данном промежутке. А если $x = a$ — точка минимума, тогда $f(a)$ — наименьшее значение функции на этом промежутке.			

Выпуклость и вогнутость кривой

Кривая, выпуклая на (a,b).	$\Leftrightarrow$	Кривая размещена ниже любой своей касательной.
Кривая, вогнутая на (a,b).	$\Leftrightarrow$	Кривая размещена выше любой своей касательной.





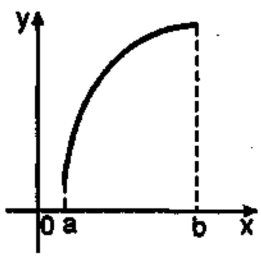
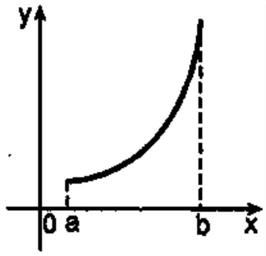
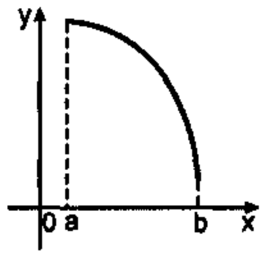
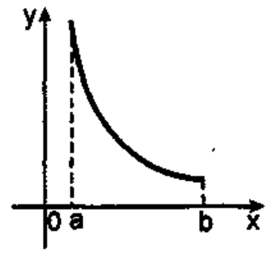
Достаточные признаки выпуклости и вогнутости

$f''(x)>0$ на (a,b). $\Rightarrow$ Кривая, вогнутая на (a,b).

$f''(x)<0$ на (a,b). $\Rightarrow$ Кривая, выпуклая на (a,b).

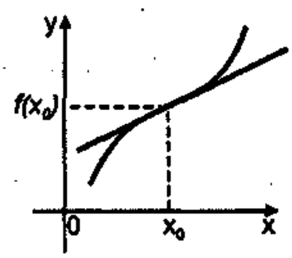
Для построения графика целесообразно проанализировать, какой вид имеет график функции на интервале (a,b) в зависимости от знаков первой и второй производных.

Результат удобно свести в таблицу:

$y'>0$, $y''<0$	$y'>0$, $y''>0$	$y'<0$, $y''<0$	$y'<0$, $y''>0$
			
возрастает, выпуклая.	возрастает, вогнутая.	убывает, выпуклая.	убывает, вогнутая.

Точки перегиба графика функции

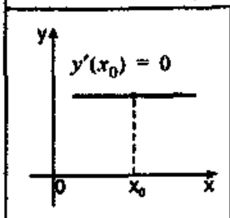
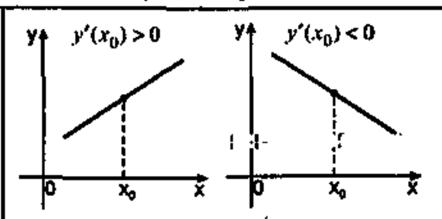
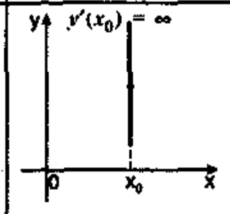
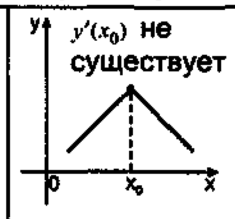
Точка перегиба $(x_0;f(x_0))$.	$\Leftrightarrow$	В точке $(x_0;f(x_0))$ существует касательная, при переходе через эту точку выпуклость меняется на вогнутость (или наоборот).



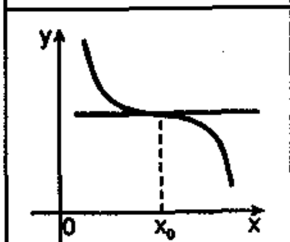
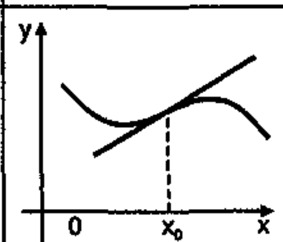
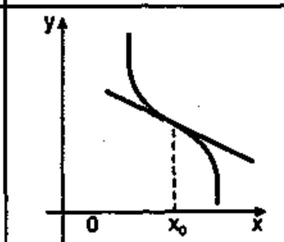
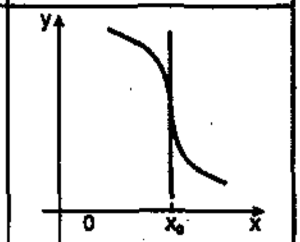
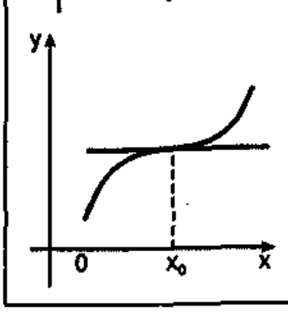
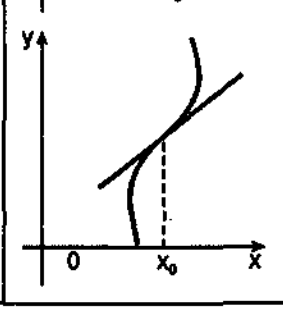
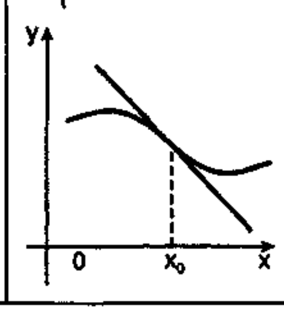
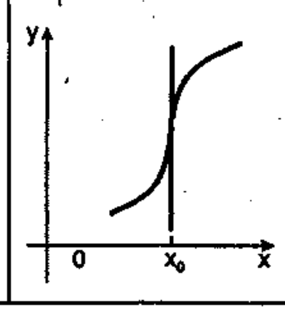
Достаточный признак точки перегиба

В точке $(x_0;f(x_0))$ существует касательная, $y''(x_0)=0$ (или не существует) и при переходе через точку x_0 y'' изменяет знак. $\Rightarrow$ $(x_0;f(x_0))$ — точка перегиба.

Для построения точки перегиба необходимо установить связь между существованием производной в точке x_0 и существованием касательной к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$.

Производная существует		Производная не существует	
			
Касательная горизонтальная.	Касательная наклонная.	Касательная вертикальная.	Касательная не существует.

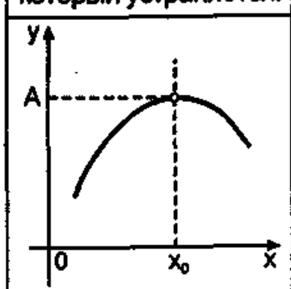
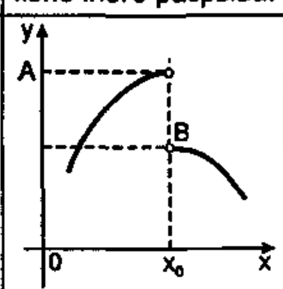
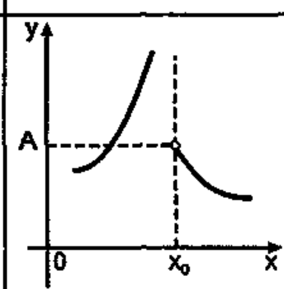
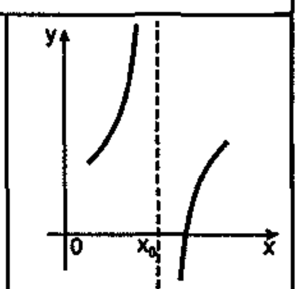
Разные типы точек перегиба

$y'(x_0) = 0$	$y'(x_0) > 0$	$y'(x_0) < 0$	$y'(x_0) = \infty$
			
			

Точки разрыва функции и их характер

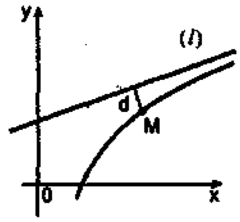
Для элементарных функций **точка разрыва** — это такая точка, в которой функция не определена, но определена вблизи этой точки.

Виды точек разрыва

x_0 — точка разрыва, который устраняется.	x_0 — точка конечного разрыва.	x_0 — точка бесконечного разрыва.	
			
$f(x_0)$ – не существует; $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A;$ $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B; A \neq B.$	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty;$ $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty;$ $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty.$

Асимптоты графика функции

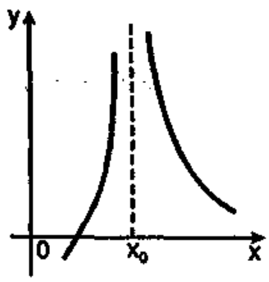
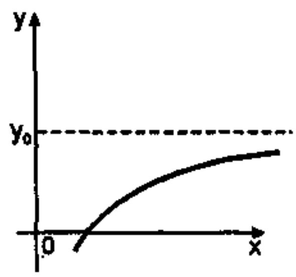
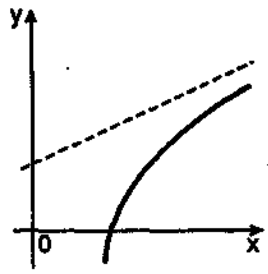
Прямая l называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки M графика до прямой стремится к нулю при удалении точки M по кривой в бесконечность.



$d \to 0$

$M \to \infty$

Виды асимптот

Вертикальная $x = x_0$	Горизонтальная $y = y_0$	Наклонная $y = kx + b \ (k \neq 0)$
		
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty.$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0.$	$k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x};$ $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx].$

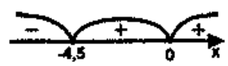
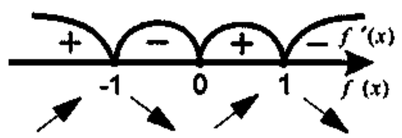
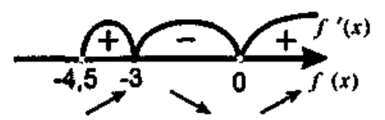
Если $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$, когда $x \to \infty$, то прямая $y = kx + b$ является асимптотой: при $k = 0$ — горизонтальной, а при $k \neq 0$ — наклонной.

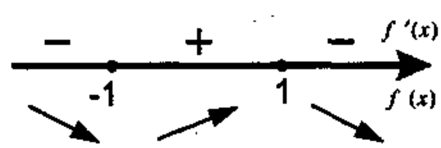
График функции может иметь вертикальные асимптоты в точках разрыва (бесконечного) или на границах области определения функции.

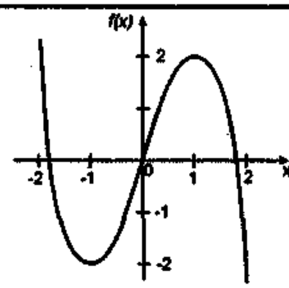
УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

1. Найти промежутки возрастания и убывания функции:	а) $y = 3x - x^3$.	б) $y = \dfrac{x^2 + 6x}{x - 2}$.
Найдем область определения функции: $D(y)$:	$D(y) = R$.	$D(y) = (-\infty;2) \cup (2;\ +\infty)$.
Найдем производную функции и разложим её на множители, если это возможно:	$y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) =$ $= 3(1 - x)(1 + x)$.	$y' = \dfrac{(2x+6)(x-2)-(x^2+6x)\cdot 1}{(x-2)^2} =$ $= \dfrac{x^2 - 4x - 12}{(x-2)^2} = \dfrac{(x+2)(x-6)}{(x-2)^2}$.
Найдем знак производной методом интервалов:	$-$ $+$ $-$ y' -1 1	$+$ $-$ $-$ $+$ y' -2 2 6
Выберем промежутки, где $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$:	$f'(x) > 0$, $x \in (-1;1)$ $f'(x) < 0$, если $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.	$f'(x) > 0$, если $x \in (-\infty;-2) \cup (6;+\infty)$, $f'(x) < 0$, если $x \in (-2;2) \cup (2;6)$.
Запишем промежутки возрастания (убывания) функции с учетом непрерывности функции на концах промежутка:	возрастает на $[-1;1]$; убывает на $(-\infty;-1]$, и $[1;+\infty)$.	функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;-2]$ и $[6;\ +\infty)$; убывает на каждом из промежутков $[-2;2)$ и $(2;6]$.

2. Найти критические точки функций:	а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.	б) $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x+3}$.
Найдем область определения функции $y = f(x)$ $D(y)$:	$D(y) = (-\infty;+\infty)$.	$D(y) = \left(-\infty;-\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.
Найдем производную функции $f'(x)$:	$f'(x) = 3x^2 - 6x =$ $= 3x(x-2)$.	$f'(x) = \dfrac{6x + 9 - 6x + 4}{(2x+3)^2} = \dfrac{13}{(2x+3)^2}$.
Найдем точки, где: а) производной не существует; б) производная равна 0 $f'(x) = 0$:	$f'(x) = 0$, $x = 0$; $x = 2$, $f'(x)$ существует при всех $x \in R$.	$f'(x)$ не существует, если $x = -\frac{3}{2}$. $f'(x) = 0; x \in \varnothing$.
Проверим, будут ли данные точки внутренними точками области определения и сделаем вывод:	$0 \in D(y)$ $2 \in D(y)$.	$-\frac{3}{2} \notin D(f)$.
Ответ:	$x = 0; x = 2$ — критические точки.	функция критических точек не имеет.

3. Найти точки экстремума и экстремумы функции:	а) $f(x) = 2x^2 - x^4$.	б) $f(x) = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$.
Находим область определения функции:	$D(f) = R$.	$2x^3 + 9x^2 \geq 0$  $x^2(2x+9) \geq 0$ $D(f) = [-4,5;+\infty)$.
Находим производную:	$f\ ' = 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2) =$ $= 4x(1-x)(1+x)$.	$f\ ' = \dfrac{6x^2 + 18x}{2\sqrt{2x^3 + 9x^2}} =$ $= \dfrac{6x(x+3)}{2\sqrt{x^2(2x+9)}} = \dfrac{3x(x+3)}{\sqrt{x^2(2x+9)}}$.
Находим критические точки: а) в которых производная не существует; б) $f'(x) = 0$:	$f\ '(x)$ существует для всех $x \in R$ $f\ ' = 0$; $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$.	$f\ '(x)$ не существует, если $x = 0$; $x = -4,5$ — не является внутренней областью определения $f\ ' = 0$; $x = -3$.
Определим знак производной на каждом из интервалов, на которые критические точки разбивают область определения:		
Найдем точки экстремума, учитывая характер изменения знака производной:	$x = -1$ — точка максимума, $x = 0$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума.	$x = -3$ — точка максимума. $x = 0$ — точка минимума.
Найдем экстремумы функции:	$f_{min} = f(0) = 0$, $f_{max} = f(-1) = 1$, $f_{max} = f(1) = 1$.	$f_{max} = f(-3) = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. $f_{min} = f(0) = 0$.

4. Исследовать функцию с помощью производной и построить её график:	$y = 3x - x^3$.
Найдем область определения функции $f(x)$:	$D(f) = R$
Найдем производную функции:	$f\ '(x) = 3 - 3x^2 = 3(1-x^2) = 3(1+x)(1-x)$.
Найдем критические точки функции. Для этого: а) определим, в каких точках производная не существует; б) решим уравнение $f\ '(x) = 0$:	а) $f\ '(x)$ существует во всех точках числовой прямой; б) $3(1+x)(1-x) = 0$, $1+x = 0$, $1-x = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ — критические точки.
Определим знак производной на каждом из интервалов, на которые критические точки разбивают область определения, найдем промежутки возрастания, убывания функции $f(x)$:	

Найдем точки экстремума функции:	$x = -1$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума функции.
Найдем экстремумы функции:	$f(-1) = 3(-1)-(-1)^3 = -2$ — минимум, $f(+1) = 3(+1)-(+1)^3 = 2$ — максимум.
Для уточнения формы графика найдем значения функции в нескольких дополнительных точках:	$f(0) = 0,\ f(2) = -2,\ f(-2) = 2$.
Начертим график функции:	

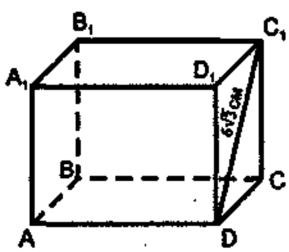
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3-3x^2-45x+225$ на отрезке $[0;6]$.	
Находим $D(y)$:	$D(y) = R$.
Находим производную y':	$y' = 3x^2-6x-45 = 3(x^2-2x-15) =$ $= 3(x-5)(x+3)$.
Находим критические точки (в которых $y'(x) = 0$ или не существует):	y' существует для всех $x \in R$ $y' = 0; 3(x-5)(x+3) = 0;\ x = 5;\ x = -3$.
Выбираем те, которые принадлежат данному отрезку:	$x = 5$ принадлежит отрезку $[0;6]$.
Вычисляем значение функции $y = f(x)$ в этих критических точках и на концах отрезка:	$y(0) = 225$, $y(5) = 50$, $y(6) = 63$.
Сравниваем полученные результаты и выбираем среди них наибольший и наименьший и записываем ответ:	$\max\limits_{[0;6]} y(x) = y(0) = 225$, $\min\limits_{[0;6]} y(x) = y(5) = 50$.

6. Найти множество значений функции $f(x) = x^3-3x^2+3$, если $x \in [-1;1]$.	
Решение. Данная функция определена и непрерывна на множестве R. $f'(x) = 3x^2-6x = 3x(x-2)$. $f'(x) = 0$; если $x = 0$ или $x = 2$. Отрезку $[-1;1]$ принадлежит одна критическая точка $x = 0$. $f(0) = 3;\ f(-1) = -1;\ f(1) = 1$. $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 3;\ \min\limits_{[-1;1]} f(x) = -1$. Учитывая непрерывность функции f, получим $[-1;3]$.	
Ответ:	$[-1;3]$.

7. Число 64 записать в виде суммы двух положительных слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
Решение. Пусть одно слагаемое будет x, тогда другое — $64-x$. $0<x<64$. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2+(64-x)^2$ на $[0;64]$. $f(x) = 2x^2-128x+4096$ — квадратичная функция. Она имеет одну точку экстремума: $x = \frac{-b}{2a} = 32$ — точку минимума. Эта точка принадлежит отрезку $[0;64]$. $f(32)<f(0)<f(64)$. Значит, функция принимает наименьшее значение при $x = 32$. Искомые слагаемые 32 и 32.
Ответ: 32 и 32.

8. В правильной четырёхугольной призме длина диагонали боковой грани равна $6\sqrt{3}$ см. При какой длине высоты объём призмы будет наибольшим?

Решение.



$V = DC^2 \cdot CC_1$

Пусть $CC_1 = x, x>0$

ΔDC_1C: $\angle C_1CD = 90°$.

Из теоремы Пифагора $DC = \sqrt{108-x^2}$.

Рассмотрим функцию: $V(x) = (108-x^2)x = 108x-x^3$

$108-x^2>0;\quad 0<x<6\sqrt{3}$.

Исследуем данную функцию на экстремум на промежутке $(0;6\sqrt{3})$:

$V'(x) = 108-3x^2 = 3(6-x)(6+x)$.

$V'(x) = 0$; если $x = 6$,

если $0<x<6$, то $V'(x)>0$,

если $6<x<6\sqrt{3}$, то $V'(x)<0$.

Значит, $x = 6$ — точка максимума.

$V(6)$ — наибольшее значение функции на промежутке $(0;6\sqrt{3})$.

Ответ: объем призмы будет наибольшим, если её высота 6 см.

Построение графиков функций

Прежде чем приступить к решению заданий, отметим, что при построении графика не обязательно анализировать все элементы поведения функции. Построение графиков функций целесообразно начинать с исследования поведения непрерывной функции, используя первую производную.

Отметим, что областью изменения многочлена нечетной степени является множество всех действительных чисел. Для многочленов четной степени и других рассматриваемых функций $E(f)$, как правило, определяется после проведения исследования. Поэтому сначала не следует уделять особое внимание нахождению $E(f)$. $E(f)$ — множество значений функции.

Алгоритм построения графика функции

1. Найти область определения функции, точки пересечения с осями координат.
2. Исследовать функцию на четность или нечетность и на периодичность.
3. Найти интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума.
4. Построить график функции.

9. Построить графики функций.

$y = 9x^2(1-x)$ **(сложность 1).**

1) Область определения $D(y)$: $(-\infty;+\infty)$.

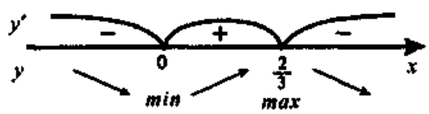
Точки пересечения с осями координат:
$x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

2) Функция непериодическая.

3) Найдем интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума:

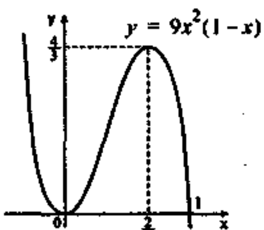
$y' = 18x - 27x^2$;

$y' = 9x(2-3x)$; $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{2}{3}$.



$y(0) = 0$; $y\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{3}$.

4)



$y = 3x^5 - 5x^4 + 4$ **(сложность 2).**

1) $D(y): (-\infty, +\infty)$; $x = 0 \Rightarrow y = 4$;

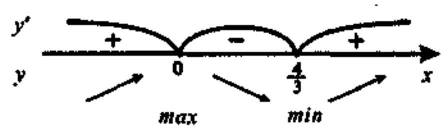
$y = 0 \Rightarrow 3x^5 - 5x^4 + 4 = 0$.

Нули функции уточним позднее.

2) Функция непериодическая.

3) $y' = 15x^4 - 20x^3$; $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0$;

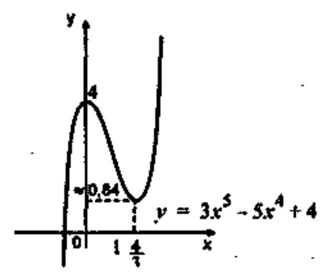
$x_2 = \dfrac{4}{3}$.



Уточним точку пересечения с Ox:

$y(0) = 4 > 0$; $y(-1) = -4 < 0$; $x \approx -0,8$.

4)



$y = sin^2x - cosx$ **(сложность 3).**

1) $D(y)$: $(-\infty, +\infty)$; $x = 0 \Rightarrow y = -1$; $y = 0 \Rightarrow sin^2x - cosx = 0$; $cos^2x + cosx - 1 = 0$;

$cosx = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $cosx_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,7$; $cosx_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$ (не подходит);

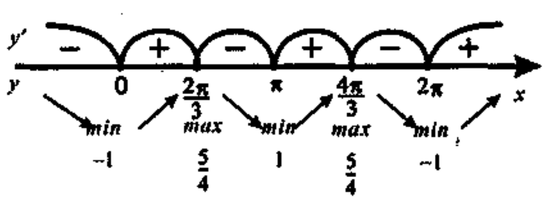
$cosx = 0,7 \Rightarrow x_1 = 40° + 360° \cdot n = 0,2\pi + 2\pi n$; $x_2 = 320° + 360° \cdot n = 1,8\pi + 2\pi n$.

2) Функция четная.

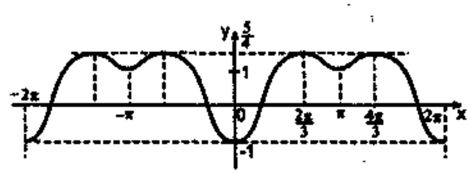
3) $y' = 2sinx \cdot cosx + sinx$; $y' = 0 \Rightarrow sinx\left(2cosx + \dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Будем искать решение на отрезке $[0, 2\pi]$.

Находим $sinx = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$; $cosx = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_4 = \dfrac{2\pi}{3}$; $x_5 = \dfrac{4\pi}{3}$.



4)



ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти промежутки монотонности функций.

а) $f(x) = x^3+3x^2-9x+1$; д) $y = (x-2)^2(x+4)^2$;

б) $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$; е) $y = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)^2}$;

в) $y = -\frac{3}{4}x^4+4x^3-6x^2+5$; ж) $f(x) = \sqrt{x^2-3x}$.

г) $y = (x-1)^3$.

2. Доказать, что функция $y = \sqrt{2}x - \cos x$ возрастает на всей числовой прямой.

3. Найти промежутки монотонности функции $y = 2,1x+2\sin x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

4. Найти промежутки монотонности функции $y = x^3+x^2+10x$.

5. Найти критические точки функций.

а) $y = \dfrac{x^2+3x}{x+4}$; д) $y = \sqrt{4-x^2}$; и) $y = x+\cos 2x$;

б) $y = (x+2)^2(x-6)^2$; е) $y = \sqrt[3]{x^2-1}$; к) $y = x-\sin 2x$;

в) $y = x^4-4x^3+4x^2+1$; ж) $y = 2x^2-x^4$; л) $y = \sin 3x+\frac{4}{3}\cos 3x-x+2$

г) $y = 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}-x$; з) $y = x\sqrt{x}-\sqrt{x}$;

6. При каких значениях a функция $y = x^3+3x^2+ax-1$ не имеет критических точек?

7. Найти точки экстремума функции.

а) $f(x) = 3x-x^3$; в) $f(x) = 3x^4-4x^3$; д) $y = \dfrac{x^2}{x^2+3}$;

б) $f(x) = x^3-3x^2+4$; г) $f(x) = \sqrt{x-1}$; е) $y = \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$.

8. При каких значениях b один из экстремумов функции $y = x^3-6x+b$ равен 2?

9. При каких значениях p функция $y = px+\cos 3x$ не имеет точек экстремума?

10. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.

а) $y = \dfrac{x^2+4}{x}$; в) $y = \sin^2 x-\cos x$; д) $y = 3x+\operatorname{tg}x$.

б) $y = \dfrac{x^3}{x^2+3}$; г) $y = \sin x+\cos x$;

11. При каких значениях a равенство $x^3-3x = a$ имеет только два разных корня?

12. При каких значениях a равенство $x^3-12x = a$ имеет три разных корня?

13. Построить график функции.

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$; б) $y = 2x^4 - x$; в) $y = x^2 - \frac{2}{x}$; г) $y = \frac{1}{x^2+1}$.

14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a;b]$.

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ на $[0;2]$;

б) $y = \frac{x^2+8}{x+1}$ на $[0;4]$;

в) $y = (1-x^2)(x-1)$ на $[0;2]$;

г) $y = x + \frac{4}{x}$ на $[1;3]$;

д) $y = -\frac{9}{x} - x$ на $[-4;1]$;

е) $y = 4\sin 2x - 2\sin 4x$ на $[0;\pi]$;

ж) $y = \sqrt{5-4x}$ на $[-1;1]$;

з) $y = \sqrt{100-x^2}$ на $[-6;8]$;

и) $y = 2\sin 2x + \cos 4x$ на $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$;

к) $y = 2\cos^2 x + \cos 2x$ на $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

15. Найти множество значений функции.

$f(x) = 12x - 4x^3$, если $x \in [-1;3]$.

16. Представить число 48 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

17. Из всех прямоугольников с диагональю 4 дм найти тот, площадь которого наибольшая.

18. В треугольник с основанием 4 см и высотой 3 см вписан прямоугольник так, что одна из его сторон лежит на основании треугольника. Какова наибольшая площадь этого прямоугольника?

19. Найти стороны прямоугольника с наибольшим периметром, вписанного в полуокружность с радиусом R.

20. Определить размеры цилиндрической консервной банки, объём которой V см^3, чтобы её полная поверхность была наименьшей (то есть расход жести на её изготовление был наименьшим).

21. Определить наибольший объем правильной треугольной пирамиды, у которой длина апофемы равна $2\sqrt{3}$ см.

22. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды 9 см. Найти высоту и сторону основания пирамиды, чтобы её объем был наибольшим.

23. Какой наименьший объем может иметь конус с образующей, равной $2\sqrt{3}$ дм?

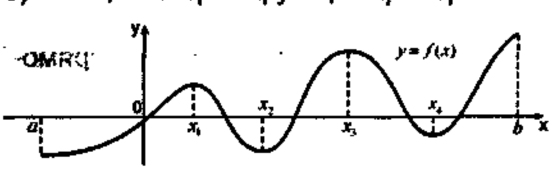
24. Пусть $f(x) = x^2 - 7x + a$. При каких значениях a $\min\limits_{[3;4]} f(x) = 2$?

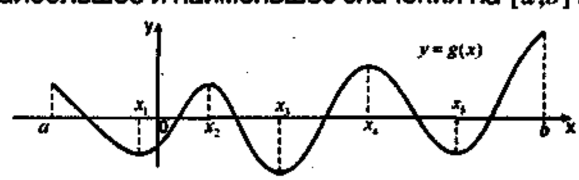
25. Пусть $f(x) = x^2$. При каких значениях b $(b > -3)$ $\max\limits_{[-3;b]} f(x) = 9$?

26. Назвать по данным таблицы промежутки возрастания, убывания функции, точки экстремума:

x	$(-3;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;8)$	8	$(8;\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	0	–
$f(x)$		-3		-5		6	

27. На рисунке изображены графики функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных на отрезке $[a;b]$. Для каждой из них найдите:
а) точки максимума и минимума;
б) точки, в которых функция приобретает наибольшее и наименьшее значения на $[a;b]$.





САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-2-1

В-I	7 баллов	В-II
1. Найти промежутки, на которых функция возрастает, убывает.		
$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$.		$y = 3 + 9x - 3x^2 - x^3$.
2. Найти критические точки функции.		
$y = \cos\frac{3}{2}x$.		$y = -\sin\frac{2}{3}x$.

В-III	9 баллов	В-IV
1. Найти промежутки, на которых функция возрастает, убывает.		
$y = \frac{1}{4}(x^2 - 2)x^2 - 3$.		$y = \frac{1}{4}(x^2 - 8)x^2 + 3$.
2. Найти критические точки функции.		
$y = 2x + \cos 4x$.		$y = \sin 4x - 2x$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Найти промежутки, на которых функция возрастает, убывает.		
$y = \frac{(x-3)^3}{x+1}$.		$y = \frac{(x-1)^3}{x+3}$.
2. Найти критические точки функции.		
$y = 2\sin^2 x - \cos 2x$.		$y = 2\cos^2 x + \cos 2x$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-2-2

Найти промежутки монотонности, экстремумы функции и построить эскиз графика функции.				
В-I	7 баллов	В-II	В-III	9 баллов
$y = x^2 - 7x + 6$.		$y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$.	$y = x^3 - 3x$.	
В-IV	9 баллов	В-V	12 баллов	В-VI
$y = -x^4 + 2x^2 + 3$.		$y = \frac{2x}{1+x^2}$.		$y = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-2-3

В-I	7 баллов	В-II
Представить число 12 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.		Представить число 10 в виде суммы двух положительных слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
9 баллов	В-III	В-IV 10 баллов
Представить число 8 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.		В равнобедренный треугольник с основанием 20 см и высотой 8 см вписан прямоугольник, одна сторона которого лежит на основании треугольника. Какой должна быть высота этого прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

<table>
<tr><th>В-V</th><th>12 баллов</th><th>В-VI</th></tr>
<tr><td colspan="2">В прямоугольный треугольник с катетом 12 см и противолежащим углом 30° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Найти размеры прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей.</td><td>В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Найти размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей.</td></tr>
</table>

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-2-1

<table>
<tr><th>В-I</th><th>7 баллов</th><th>В-II</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Найти критические точки функции.</td></tr>
<tr><td colspan="2">а) $y = 3x+5$; б) $y = x^2-5x-1$.</td><td>а) $y = 3x+5$; б) $y = x^2-5x-1$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Найти промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = \frac{x^3}{3}-2x^2$.</td><td>$y = \frac{x^3}{3}-2x^2$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = \frac{1}{3}x^3-4x$ на $[0;3]$.</td><td>$y = x-\frac{1}{3}x^3$ на $[-2;0]$.</td></tr>
<tr><th>В-III</th><th>9 баллов</th><th>В-IV</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Найти критические точки функции.</td></tr>
<tr><td colspan="2">а) $y = x-2\sin x$; б) $y = x^3(x-4)$.</td><td>а) $y = x+2\cos x$; б) $y = x^3(x-2)$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Найти промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = x^4-8x^2$.</td><td>$y = 48x-x^3$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = \frac{4x}{x^2+1}$ на $[-2;4]$.</td><td>$y = \frac{x^2-3x}{x+1}$ на $[0;2]$.</td></tr>
<tr><th>В-V</th><th>12 баллов</th><th>В-VI</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Найти критические точки функции.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = x+\frac{4}{x}$.</td><td>$y = -\frac{9}{x}-x$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Найти промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = \frac{1}{(x-3)^2}$.</td><td>$y = \frac{-1}{(x-1)^2}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = 2\cos x+\cos 2x$ на $[0;\pi]$.</td><td>$y = 2\sin x+\sin 2x$ на $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. При каких значениях b один из экстремумов функции $y = x^3-3x+b$ равен 7?</td><td>4. При каких значениях b один из экстремумов функции $y = 2x^3-3x^2+b$ равен -1?</td></tr>
</table>

СТРАНИЧКА АБИТУРИЕНТА

Использование производной для доказательства тождества

1. Доказать тождество: $sin^2x + cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = sin^2x + cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) =$

$$= sin^2x + \frac{1}{2}\left(cos2x + cos\frac{2\pi}{3}\right) = sin^2x + \frac{1}{2}cos2x - \frac{1}{4}.$$

$f'(x) = 2sinxcosx - sin2x = sin2x - sin2x = 0.$

$f'(x) = 0$ для всех $x \in R$, значит, $f(x)$ — постоянная; $f(x) = C$.

Вычислим значение функции $f(x)$ при любом значении x, например, $x = 0$.

$f(0) = sin^20 + cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)cos\frac{\pi}{3} = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

$f(0) = \frac{1}{4}$; $C = \frac{1}{4}$; то есть, верно тождество $sin^2x + cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$.

Использование производной для доказательства неравенств

Чтобы доказать неравенство $f(x) \geq 0$ при $x \geq 0$, достаточно, чтобы $f(0) \geq 0$ и $f'(x) \geq 0$ при $x \geq 0$.

1. Доказать, что $sinx < x$ для всех $x > 0$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x - sinx$.

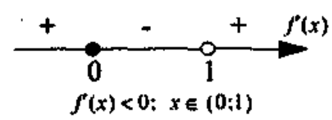
$f'(x) = 1 - cosx \geq 0$ для всех $x \in R$. Значит, $f(x)$ возрастает на R. Если $x > 0$, то $f(x) > f(0)$, то есть $x - sinx > 0$; или $sinx < x$.

2. Доказать, что при $0 < x < \frac{1}{2}$ справедливо неравенство: $2x + \frac{1}{x^2} > 5$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$.

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3-1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$$



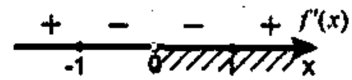
На промежутке $(0;1]$ данная функция убывает, поэтому при $0 < x < \frac{1}{2}$ справедливо неравенство $f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right)$. Но $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5$.

Значит, $f(x) > 5$, то есть $2x + \frac{1}{x^2} > 5$.

3. Доказать, что $x+\frac{1}{x}\ge 2$ при $x\ge 0$.

Решение.

$f(x) = x+\frac{1}{x}$; $f'(x) = 1-\frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$



На промежутке $(0;+\infty)$ $x = 1$ — точка максимума, $f(1)$ — наименьшее значение функции $f(x) = x+\frac{1}{x}$, $f(1) = 1+1 = 2$. Значит, $f(x)\ge 2$, то есть других точек экстремума нет. То есть $x+\frac{1}{x}\ge 2$, если $x\ge 0$.

4. Исследовать функцию и построить её график.

а) $y = 3\sqrt[3]{x^2}-x^2$.

1) $D(y)$: $(-\infty;+\infty)$;

$x = 0\Rightarrow y = 0$; $y = 0\Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2}-x^2 = 0$;

$\sqrt[3]{x^2}(3-\sqrt[3]{x^4}) = 0$; $x_1 = 0$;

$x_{2,3} = \pm\sqrt[4]{x^3}\approx\pm 2,3$.

2) Функция четная.

3) $y' = 3\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-2x$; $y' = \frac{2(1-x\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}$.

В этом примере ищем не только такие точки, где $y' = 0$, но и такие, где y' не существует.

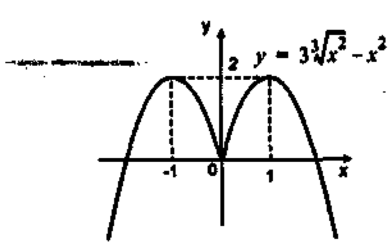
Имеем $y' = 0\Rightarrow 1-x\sqrt[3]{x} = 0\Rightarrow x_{1,2}\pm 1$;

y' не существует $\Rightarrow x = 0$. Если $x\to 0$, то $y'\to\infty$, то есть в точке (0;0) касательная к графику функции вертикальная.

$y(\pm 1) = 2$; $y(0) = 0$;

E_1: $(-\infty;2]$.

4)



б) $y = 3\sqrt[3]{x}-x$.

1) $D(y)$: $(-\infty;+\infty)$;

$x = 0\Rightarrow y = 0$;

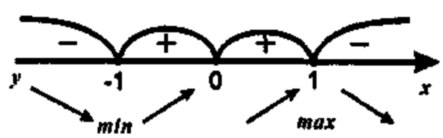
$y = 0\Rightarrow x_1 = 0$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{27}$.

2) Функция нечетная.

3) $y' = 3\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-1$;

$y' = \frac{1-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$; $y' = 0\Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$;

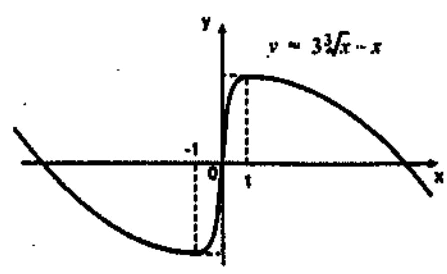
y' не существует $\Rightarrow x = 0$;



$y(\pm 1) = \pm 2$; $y(0) = 0$,

$E(y)$: $(-\infty;+\infty)$.

4)



ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ АБИТУРИЕНТА

Применение производной

1. Написать уравнение касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, если касательные проходят через точку $M(2;-5)$.

2. При каких значениях a функция $x(t) = at^3 + at$ возрастает на R?

3. Доказать, что при $x \geq 1$ справедливо неравенство $2\sqrt{x} \geq 3 - \frac{1}{x}$.

4. Найти все значения параметра a, при которых функция

$f(x) = \frac{a^2 - 1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2x + 5$ возрастает на R.

5. При каких значениях p функция $y = px + \cos 3x$ не имеет точек экстремума?

§3. Интеграл и его применение

Первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке называется функция $F(x)$, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

$f(x)$	$F(x)$	Доказать, что $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на заданном промежутке.
$2x$	$x^2,\ x \in R$	$F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x),\ x \in R.$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x),\ x \in (0;+\infty)$.
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$F'(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} = f(x),\ x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty).$
$sinx$	$-cosx$	$F'(x) = (-cosx)' = -(-sinx) = sinx = f(x),\ x \in R.$
$cosx$	$sinx$	$f'(x) = (sinx)' = cosx = f(x),\ x \in R.$
$\frac{1}{cos^2x}$	tgx	$F'(x) = (tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$, для всех x, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$
$\frac{1}{sin^2x}$	$-ctgx$	$F'(x) = (-ctgx)' = -\left(-\frac{1}{sin^2x}\right) = \frac{1}{sin^2x} = f(x)$ для всех x, кроме $x = \pi n,\ n \in Z.$
k k — число	kx	$F'(x) = (kx)' = k = f(x),\ x \in R.$
x	$\frac{x^2}{2}$	$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = f(x),\ x \in R.$
x^2	$\frac{x^3}{3}$	$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x),\ x \in R.$
x^α $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$F'(x) = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) \cdot x^\alpha = x^\alpha = f(x),\ x \in R,\ \alpha \neq -1$

Операция нахождения

производной функции — дифференцирование.

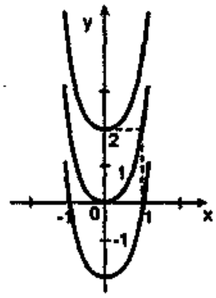
первообразной функции — интегрирование.

Интегрирование — операция, обратная дифференцированию.

Основное свойство первообразной

Если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, $\Longleftrightarrow$ $F(x) + c$ — первообразная для $f(x)$.

c — произвольная постоянная.



Каждая из функций $y = 2x^2$; $y = 2x^2 + 2$; $y = 2x^2 - 2$ является первообразной для функции $y = 4x$.

Геометрическая интерпретация основного свойства первообразной

Графики всех первообразных данной функции можно получить из любого путем параллельного переноса вдоль оси Oy.

$F(x) + c$ — общий вид первообразной для $f(x)$.

$2x^2 + c$ — общий вид первообразной для $4x$.

Три правила нахождения первообразной

Если		
Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, H — первообразная для h,	то $\Rightarrow$	$F(x) + H(x)$ — первообразная для $f(x) + h(x)$.
Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$,	то $\Rightarrow$	$kF(x)$ — первообразная для $k \cdot f(x)$; $k = \text{const}$.
Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$,	то $\Rightarrow$	$\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для $f(kx+b)$; k и b — постоянные; $k \neq 0$.

Функция	Общий вид первообразных
$x^4 + x^{-7}$	$\frac{x^{4+1}}{4+1} + \frac{x^{-7+1}}{-7+1} + c = \frac{x^5}{5} + \frac{x^{-6}}{-6} + c = \frac{x^5}{5} - \frac{1}{6x^6} + c.$
$12 - \frac{1}{x^{10}} = 12 - x^{-10}$	$12x - \frac{x^{-10+1}}{-10+1} + c = 12x - \frac{x^{-9}}{-9} + c = 12x + \frac{1}{9x^9} + c.$
$\sqrt{x} + \cos x = x^{\frac{1}{2}} + \cos x$	$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \sin x + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \sin x + c = = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \sin x + c.$
$\frac{5}{\sin^2 x}$	$5 \cdot (-\operatorname{ctg} x) + c = -5\operatorname{ctg} x + c.$
$\frac{1}{4\cos^2 x}$	$\frac{1}{4} \cdot \operatorname{tg} x + c = \frac{\operatorname{tg} x}{4} + c.$
$10 \cdot x^{16}$	$10 \cdot \frac{x^{16+1}}{16+1} + c = \frac{10 \cdot x^{17}}{17} + c.$
$\frac{22}{x^{12}} = 22 \cdot x^{-12}$	$22 \cdot \frac{x^{-11}}{-11} + c = -\frac{22}{11 \cdot x^{11}} + c = \frac{-2}{x^{11}} + c.$
$\frac{1}{4 \cdot x^{11}} = \frac{1}{4} \cdot x^{-11}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{x^{-10}}{-10} + c = -\frac{1}{40 \cdot x^{10}} + c.$

$\frac{10}{\sqrt{x}}$	$10\cdot 2\sqrt{x}+c = 20\sqrt{x}+c$,
$\frac{10}{\sqrt[3]{x}} = 10\cdot x^{-1/3}$	$10\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+c = 10\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{2}+c = 15\sqrt[3]{x^2}+c$.
$\cos 4x$	$\frac{1}{4}\sin 4x+c$.
$\sin\frac{x}{3}$	$-3\cos\frac{x}{3}+c$.
$\frac{1}{\cos^2(7x+6)}$	$\frac{1}{7}tg(7x+6)+c$.
$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{5}-2\right)}$	$-5ctg\left(\frac{x}{5}-2\right)+c$.
$\frac{1}{\sqrt{15x+4}}$	$\frac{1}{15}\cdot 2\sqrt{15x+4}+c = \frac{2}{15}\sqrt{15x+4}+c$.
$\frac{1}{(7-3x)^2}$	$-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{7-3x}\right)+c = \frac{1}{3(7-3x)}+c$.
$(8x+2)^9$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{(8x+2)^{10}}{10}+c = \frac{(8x+2)^{10}}{80}+c$.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на промежутке называется **неопределённым интегралом** от функции f на этом промежутке.

Обозначается: $\int f(x)dx$, читается: интеграл эф от икс по дэ икс.

$\int$ — знак интеграла, $f(x)$ — подинтегральная функция,

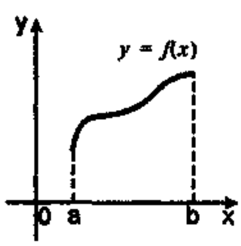
$f(x)dx$ — подинтегральное выражение, x — переменная интегрирования.

Если $F(x)$ — одна из первообразных для f, пишут: $\int f(x)dx = F(x)+c$.

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, k = const; постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)\pm\int g(x)dx$; интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой функции.

Таблица неопределенных интегралов	Пример
1. $\int 0dx = c$, c — постоянная.	
2. $\int kdx = kx + c$	$\int x^{98}dx = \frac{x^{99}}{99} + c$
3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c;\ \alpha \neq -1$	
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$	$\int (3x^2 + x + 1)dx = \int 3x^2dx + \int xdx + \int 1dx =$ $= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c = x^3 + \frac{x^2}{2} + x + c.$
5. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$	
6. $\int sinxdx = -cosx + c$	$\int sin\left(-\frac{x}{17} + 2\right)dx = -17 \cdot \left(-cos\left(-\frac{x}{17} + 2\right)\right) + c =$ $= 17cos\left(-\frac{x}{17} + 2\right) + c.$
7. $\int cosxdx = sinx + c$	
8. $\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + c$	$\int cos^2dx = \int \frac{1 + cos2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (1 + cos2x)dx =$ $= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}sin2x\right) + c = \frac{x}{2} + \frac{sin2x}{4} + c.$
9. $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + c$	
10. $\int sin(kx + b)dx = -\frac{1}{k}cos(kx + b) + c$	$\int \frac{x^2 + 1}{x^2}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx = x - \frac{1}{x} + c.$
11. $\int cos(kx + b)dx = \frac{1}{k}sin(kx + b) + c$	$\int tg^2xdx = \int \frac{sin^2x}{cos^2x}dx = \int \frac{1 - cos^2x}{cos^2x}dx =$ $= \int \left(\frac{1}{cos^2x} - 1\right)dx = tgx - x + c.$
12. $\int (kx + b)^{\alpha}dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{(kx + b)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c$, $\alpha \neq -1$	
13. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + c$	
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = arcsinx + c$	



$f(x)$ — непрерывная на промежутке I;

$F(x)$ — первообразная для f на промежутке I;

$F(b) - F(a)$ — приращение первообразной.

> Число $F(b) - F(a)$ называется **определенным интегралом** от a до b от функции $f(x)$
> $a \in I,\quad b \in I.$

Обозначается: $\begin{cases} \text{а) } \int_a^b f(x)dx\text{; читается: интеграл от } a \text{ до } b \text{ эф от икс дэ икс;} \\ F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \end{cases}$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \quad \textbf{формула Ньютона-Лейбница}$$

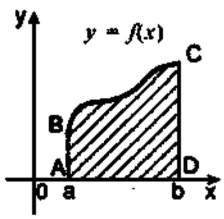
$f(x)$ — подинтегральная функция;
$f(x)dx$ — подинтегральное выражение;
a — нижний предел интегрирования;
b — верхний предел интегрирования;
x — переменная интегрирования.

	Вычислить интегралы.
Чтобы вычислить определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$, нужно найти одну из первообразных для функции $f(x)$, в полученное выражение вместо x сначала подставить верхний, а потом нижний предел интегрирования, а потом от первого результата вычесть второй.	$\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big\|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$ $\int_0^\pi cosxdx = sinx\|_0^\pi = sin\pi - sin0 = 0 - 0 = 0.$ $\int_1^1 (x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big\|_{-1}^1 =$ $\left(\frac{1}{3}+1\right) - \left(-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 = 2\frac{2}{3}.$ $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4sinxdx = (-4cosx)\Big\|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-4cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(-4cos\frac{\pi}{3}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

Основные свойства определенных интегралов

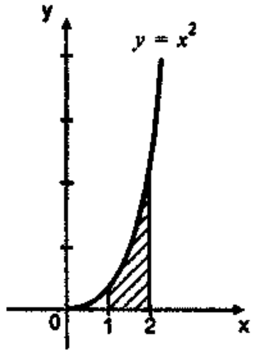
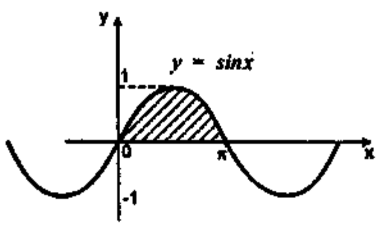
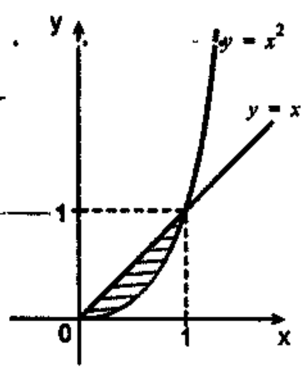
1) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$
2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx;$
3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$
4) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
5) $\int_a^a f(x)dx = 0$

Геометрический смысл определенного интеграла

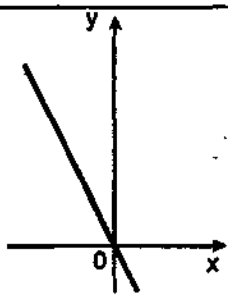
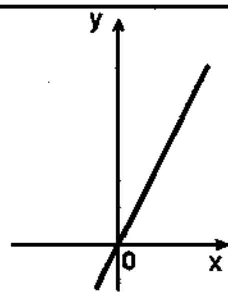
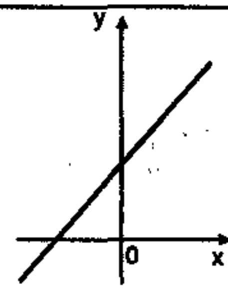
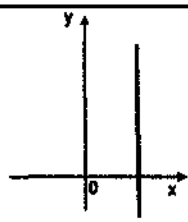
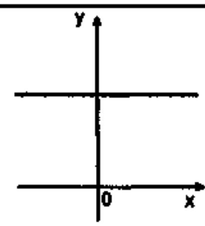
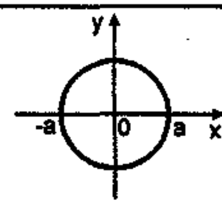
	**Криволинейной трапецией** называется фигура, ограниченная графиком неотрицательной непрерывной функции f на отрезке $[a;b]$, осью Ox $(y=0)$, прямыми $x=a$, $x=b$. $\boxed{S_{ABCD}=\int_a^b f(x)dx}$

Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком данной функции.

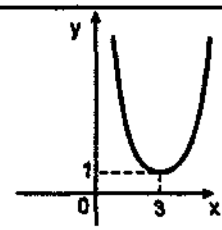
Площадь фигуры, заштрихованной на рисунке, равна:

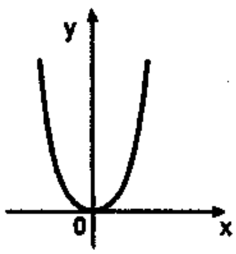
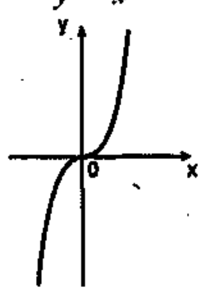
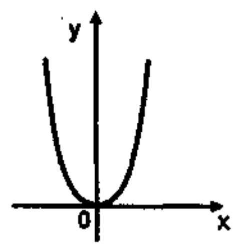
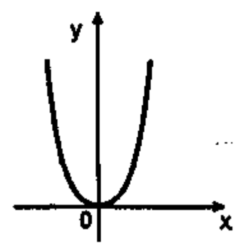
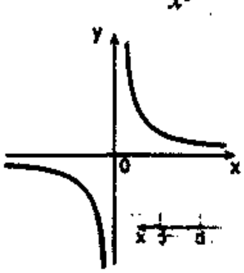
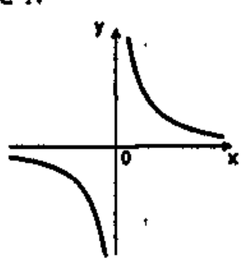
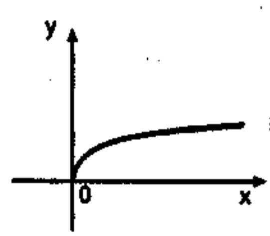
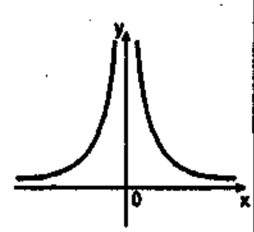
	$S=\int_1^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\|_1^2=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}.$
	$S=\int_0^\pi sinxdx=-cosx\|_0^\pi=-cos\pi-(-cos0)=1+1=2.$
	$S=\int_0^1 xdx-\int_0^1 x^2dx=$ $=\int_0^1(x-x^2)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big\|_0^1=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{0}{2}-\frac{0}{3}\right)=\frac{1}{6}.$

Вспомни графики.

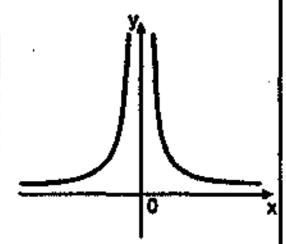
 $y = ax,\ (a<0)$	 $y = ax,\ (a>0)$	 $y = kx+b,\ k>0$
 $x = a, a>0$	 $y = b\ ,\ b>0$	 $x^2+y^2 = a^2$

Построить график функции $y = 2x^2-12x+19$.
Решение.

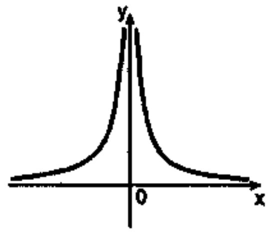
1) $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 3$. 2) $y_0 = y(x_0) = y(3) = 1$. 3) Строим параболу вида $y = 2x^2$ (ветви вверх, поскольку $a = 2>0$) с вершиной в точке $(3;1)$ (пересечение с осью Oy в точке $c = 19$).	

$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^4$	$y = x^{2n},\ n\in N$
			
$y = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ 	$y = x^{-(2n-1)} = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$, $n\in N$ 	$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ 

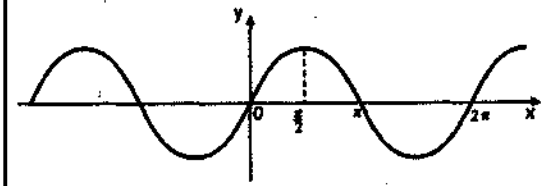
$y = x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$



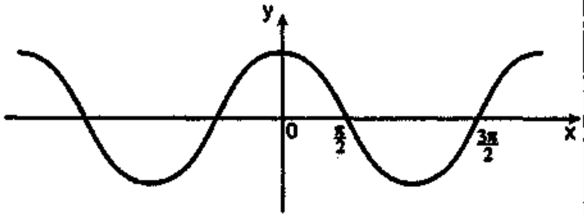
$y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}},\ n \in N$



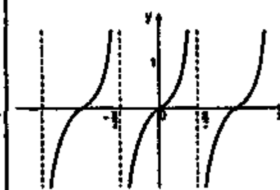
$y = \sin x$



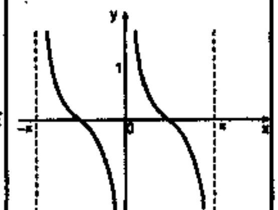
$y = \cos x$



$y = tgx$

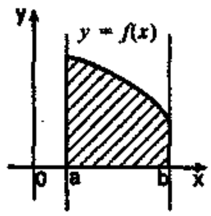


$y = ctgx$

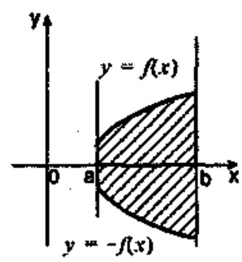


Вычисление площади трапеции с помощью интеграла

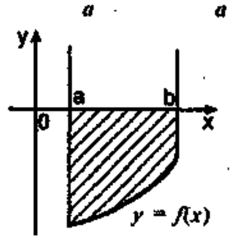
$f(x) \geq 0;\ S = \int_a^b f(x)dx.$



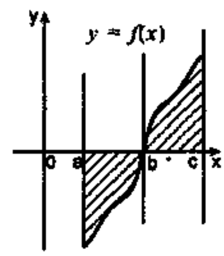
$S = 2\int_a^b f(x)dx.$



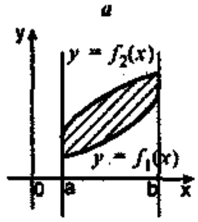
$f(x) \leq 0;\ S = -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx.$



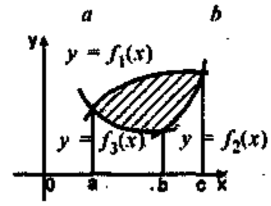
$S = -\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$



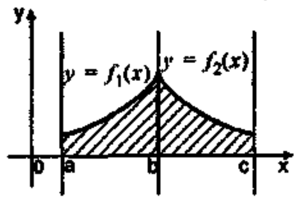
$f_2(x) > f_1(x);\ S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$



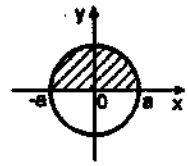
$S = \int_a^c f_1(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx - \int_b^c f_2(x)dx.$

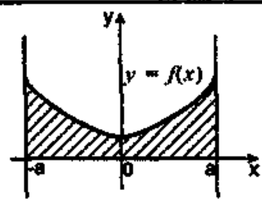


$$S = \int_a^b f_1(x)dx + \int_b^c f_2(x)dx$$



$$\int_{-a}^{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}dx = \frac{1}{2}S_{kp} = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi a^2.$$



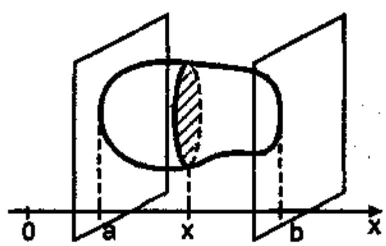


$$S = 2\int_0^a f(x)dx$$

Объемы тел

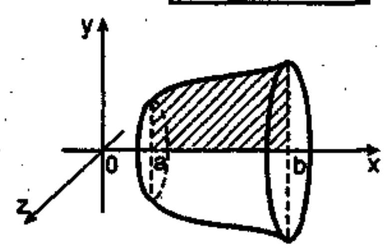
В общем случае

Если тело расположено между двумя перпендикулярными к оси Ox плоскостями, которые проходят через точки $x = a$ и $x = b$, то $\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$, где $S(x)$ — **площадь сечения тела плоскостью,** которая проходит через точку $x \in [a;b]$ и перпендикулярна оси Ox.



Для тел вращения

Если тело получено в результате поворота вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, то $\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)dx}$.



Механический смысл интеграла

Если функция $v = f(t)$ определяет мгновенную скорость движения тела в каждый момент времени t на $[a;b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(t)dt$ равен пути, пройденному за отрезок времени $t = b - a$.

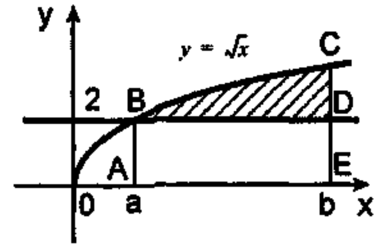
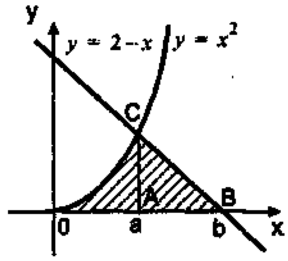
УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

Для функции $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{4};0\right)$.	
Решение.	
Найдем общий вид первообразной:	$F(x) = tgx + c$.
Координаты точки M подставим в равенство первообразной:	$0 = tg\dfrac{\pi}{4} + c$.
Найдем постоянную c:	$0 = 1 + c; \quad c = -1$.
Ответ:	$F(x) = tgx - 1$.

Вычислить интеграл.	$\displaystyle\int\frac{x^3+x^2+1}{x^2}dx$;
Решение.	
Представим подинтегральное выражение в виде суммы дробей, разделив почленно числитель на x^2. Используем формулу интеграла суммы:	$\displaystyle\int\frac{x^3+x^2+1}{x^2}dx = \int\left(x+1+\frac{1}{x^2}\right)dx = \int xdx + \int dx + \int\frac{1}{x^2}dx = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{x} + c.$

Найти интеграл.	$\displaystyle\int\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$;
Решение.	
Представим подинтегральное выражение в виде степени с дробным показателем:	$\displaystyle\int\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int 2x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{-1}{3}}dx = \int 2x^{\frac{7}{6}}dx = 2\frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + c = \frac{12}{13}\sqrt[6]{x^{13}} + c = \frac{12}{13}x^2\sqrt[6]{x} + c.$

Найти $\int(x-3)dx$, если при $x = 2$ первообразная функции равна 9.	
Решение.	
Вычислим интеграл:	$\displaystyle\int(x-3)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + c$.
Найдем постоянную c:	$\dfrac{2^2}{2} - 3\cdot 2 + c = 9; \quad 2 - 6 + c = 9; \quad c = 13$.
Ответ:	$\displaystyle\int(x-3)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 13$.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.	а) $y(x) = \sqrt{x},\ y = 2,\ x = 9.$	б) $y(x) = x^2,\ y = 2 - x,\ y = 0.$
1. Строим заданные линии и штрихованием отмечаем фигуру, площадь которой надо найти. Установим, является ли эта фигура криволинейной трапецией:		

2. Записываем формулу для вычисления площади искомой фигуры:	$S = S_{ABCDE} - S_{ABDE} = \int_a^b \sqrt{x}dx - \int_a^b 2dx.$	$S = S_{OAC} + S_{ACB} = \int_0^a x^2dx - \int_a^b (2-x)dx.$
3. Находим пределы интегрирования:	$\begin{cases} y = \sqrt{x}, \ \sqrt{x} = 2, \ x = 4, \\ y = 2; \end{cases}$ $a = x_A = 4, \quad b = x_B = 9.$	$\begin{cases} y = 2-x; \\ y = 0; \end{cases} \quad 2-x = 0; \ x = 2.$ $\begin{cases} y = x^2, \ x^2+x-2 = 0, \\ y = 2-x; \text{ и } x = 1, \ x = -2; \end{cases}$ $a = x_A = 1, \ b = x_B = 2.$
4. Вычислим искомую площадь по формуле (1):	$S = \int_4^9 \sqrt{x}dx - \int_4^9 2dx =$ $= \left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right\|_4^9 - 2x\|_4^9 =$ $= \frac{2}{3}(27-8) - 2(9-4) = \frac{8}{3},$ $S = \frac{8}{3}$ (кв.ед.)	$S = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (2-x)dx =$ $= \left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1 + \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right\|_1^2 =$ $= \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{4}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6},$ $S = \frac{5}{6}$ (кв.ед.)
5. Ответ:	$\frac{8}{3}$ (кв.ед.)	$\frac{5}{6}$ (кв.ед.)

Используя геометрический смысл интеграла, вычислить $\int_{-5}^{0} \sqrt{25-x^2}dx$.

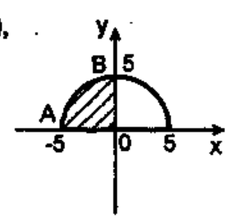
Решение.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{25-x^2}$. Найдем её область определения: $25-x^2 \geq 0, \ -5 \leq x \leq 5$. Значит, на отрезке $[-5;0]$ функция определена и принимает неотрицательные значения. Поэтому значение интеграла $\int_{-5}^{0} \sqrt{25-x^2}dx$ равно площади фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{25-x^2}, \ y = 0, \ x = -5, \ x = 0$.

Если $y \geq 0$, то $y^2 = 25-x^2$ — уравнение полуокружности с центром в $O(0;0)$ и радиусом 5.

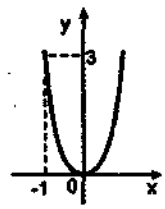
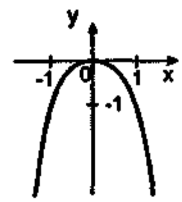
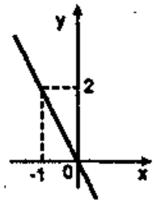
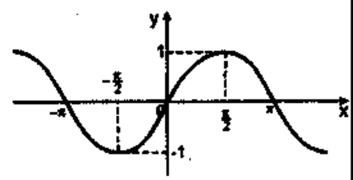
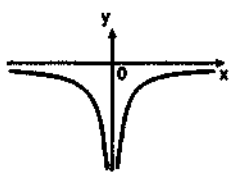
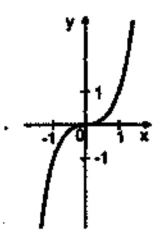
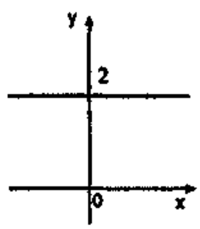
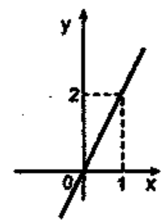
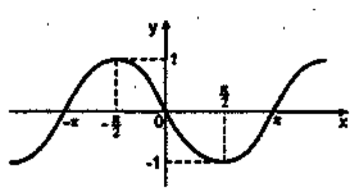
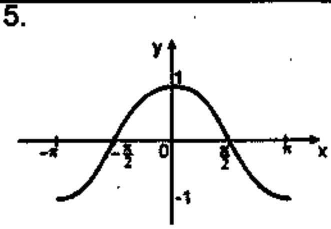
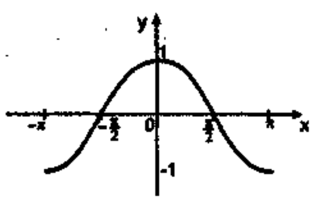
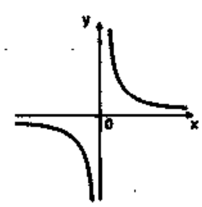
Значение выражения $\int_{-5}^{0} \sqrt{25-x^2}dx$ равно $\frac{1}{4}$ площади круга (см. рис.),

то есть $_{AOB} = \int_{-5}^{0} \sqrt{25-x^2}dx = \frac{1}{4}S_{kp.} = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 25 = 6,25\pi.$



ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Установить соответствие между функцией, записанной в столбике А, её схематическим графиком в столбике Б, первообразной — в столбике В и её графиком — столбике Г. Например, 1А → 6Б → 4В → 2Г

А	Б	В	Г
. $y = \cos x$	1. 	1. $y = 2x$	1. 
2. $y = 2$	2. 	2. $y = \frac{1}{x}$	2. 
3. $y = -\sin x$	3. 	3. $y = -x^2$	3. 
4. $y = -2x$	4. 	4. $y = \sin x$	4. 
5. $y = -\frac{1}{x^2}$	5. 	5. $y = x^3$	5. 
6. $y = 3x^2$	6. 	6. $y = \cos x$	6. 

2. Найти общий вид первообразных для функции $y = f(x)$.

а) $y = x^4 + 3x^2$; $y = 3x^2 + 3$; $y = \frac{x^4}{4} + 3$; $y = x^5 + 3x^8$; $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$;

б) $y = 4\cos x - 2\sin x$; $y = 1 + tg^2 x$; $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

в) $y = 7\sqrt{x}$; $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $y = \frac{3}{x^4}$; $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$; $y = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x}}$;

г) $y = \cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4}$; $y = \sin^2 6x$; $y = \sin 2x \cdot \cos 2x$;

д) $\sin x \cdot \sin 3x$; $y = \sin 2x \cdot \cos 4x$; $y = 1 + ctg^2\frac{x}{7}$;

е) $y = \frac{1}{(5x-2)^2}$; $y = \frac{1}{\sqrt{3-4x}}$; $y = (2x+1)^4$; $y = \frac{1}{(1-0{,}5x)^{10}}$.

3. Для функции $y = f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку $A(x;y)$.

а) $y = 3x^2 - 2x - 3$; $A(3;9)$;

б) $y = 2\cos 2x - 3\sin 3x$; $A\left(\frac{\pi}{6};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $f(x) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$, $M\left(\frac{\pi}{3};16\right)$

4. Вычислить интегралы:

а) $\int x\,dx$; $\int 5\,dx$; $\int x^{20}dx$; $\int x^2\sqrt{x}\,dx$; $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$;

б) $\int (3x - x^2)dx$; $\int x^2(1+2x)dx$; $\int (3x+1)^3 dx$;

в) $\int 2\sin x\cos x\,dx$; $\int (2\cos^2 4x - 1)dx$; $\int (1 + ctg^2 10x)dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{4-5x}}$; $\int \frac{dx}{(x-2)^2}$; $\int \frac{dx}{\left(7 - \frac{x}{3}\right)^2}$.

5. Найти $\int (\sin x + \cos x)dx$, если при $x = \frac{\pi}{2}$ первообразная функции равна 2.

6. Вычислить интегралы.

а) $\int_{-1}^{2} dx$; $\int_{0}^{3} 5\,dx$; $\int_{-2}^{5} x\,dx$;

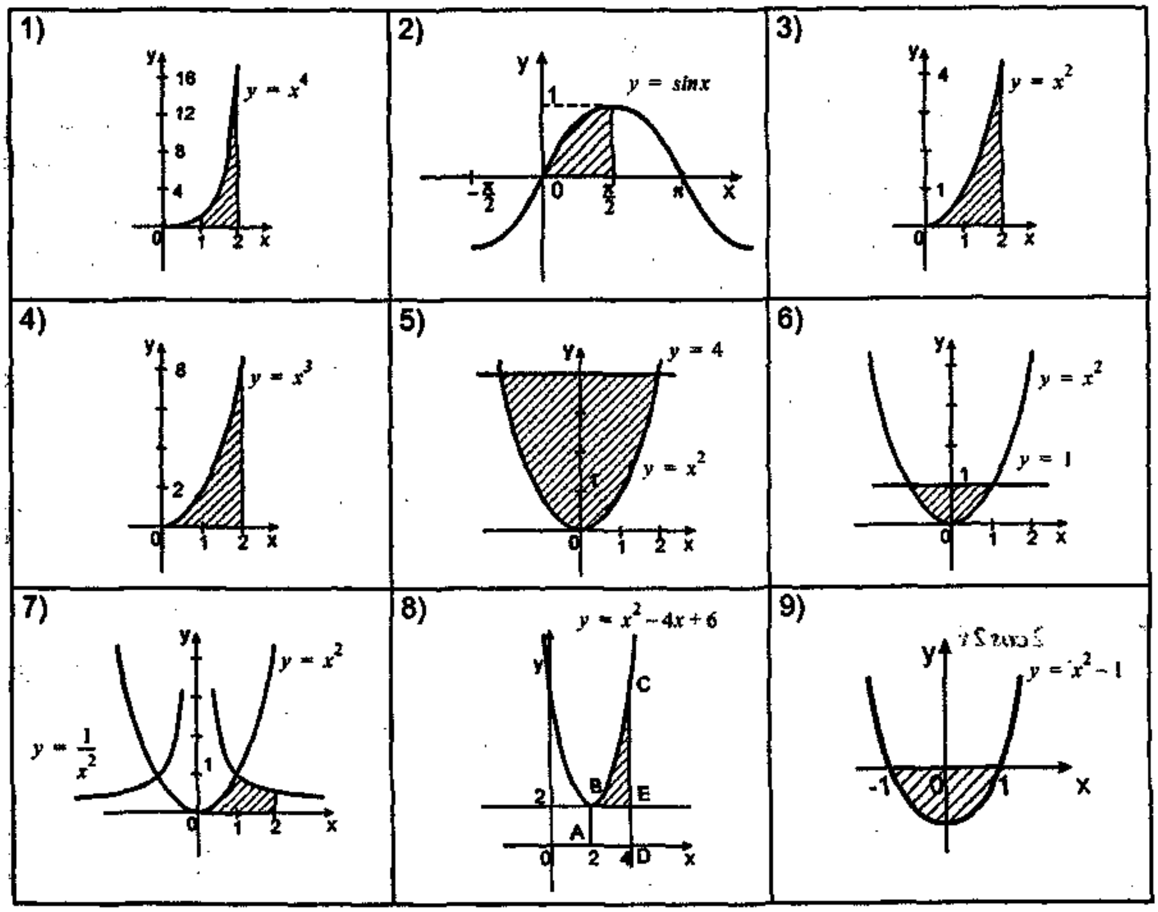
б) $\int_{1}^{4} (3-2x)dx$; $\int_{-1}^{0} (x^2+2x)dx$; $\int_{2}^{7} \frac{dx}{x^2}$; $\int_{1}^{2} \frac{dx}{3x^6}$; $\int_{1}^{4} 2\sqrt{x}\,dx$;

в) $\int \frac{2x^3 + 3x - 2}{x^5}dx$; $\int_{10}^{1} \frac{2x^2 + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

г) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x\,dx$; $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$; $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x}\,dx$; $\int_{3}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$;

$\int_{-3}^{6} f(x)dx$, где $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } -3 \le x \le 2 \\ 6 - x, \text{ если } x > 2 \end{cases}$

7. Вычислить площадь фигуры, изображенной на рисунке.



8. Начертить фигуру, площадь которой равна следующим интегралам:

а) $\int_0^2 x^2dx$; б) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; г) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \frac{1}{x^2}$; $y = 0$; $x = -1$; $x = -3$; б) $y = x^3 + 2$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 2$

в) $y = 2 + x - x^2$; $y = x + 2$; г) $y = 4x - x^2$; $y = 0$; $x = 5$;

д) $y = 1 - x$; $y = 3 - 2x - x^2$; е) $y = x^2 - 4x + 6$; $y = 2$; $x = 4$;

ж) $y = x^2$; $y = \frac{1}{x^2}$; $y = 0$; $x = 2$; $x > 0$; $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$, $y = 0$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$.

з) $3y = \sin 2x$; $y = x - \frac{\pi}{2}$; $x = 0$.

и) $y = \sin x$; $y = 2\sin x$; $x = \frac{5\pi}{4}$; $x = 0$;

к) $y = \sqrt{x}$; $y = |x-2|$; з) $y = \cos 2x$; $y = 0$; $\left(-\frac{\pi}{4}\right) \le x \le \frac{\pi}{4}$.

10. Найти все такие a, чтобы $\int_{-1}^{a} 2x dx < 8$.

11. Найти путь, который пройдет свободнопадающее тело от момента $t_1 = 2$ с до $t_2 = 10$ с.

12. Найти объем тела, полученного при повороте вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 2x + 1$; $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-1

В-I	7 баллов	В-II

1. Построить график функции $y = f(x)$. Найти общий вид её первообразной.	
$f(x) = 2x - 3$.	$y = 4 - 2x$.
2. Найти первообразную для функции $y = f(x)$, график которой проходит через точку $M(x;y)$.	
$y = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$; $A(1;-1)$.	$y = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$; $B(-1;-3)$.
3. Вычислить интегралы.	
$\int sin 20x dx$; $\int cos\frac{x}{9}dx$.	$\int sin\frac{x}{5}dx$; $\int cos 6x dx$.

В-III	9 баллов	В-IV

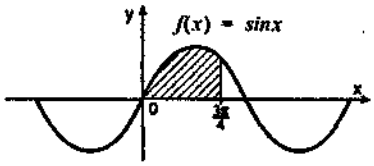
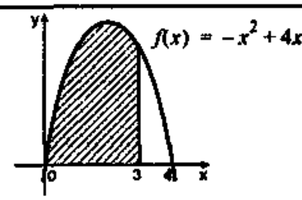
1. Построить график функции $y = f(x)$. Найти общий вид её первообразной.	
$y = x^2 - 4$.	$y = -x^2 + 5$.
2. Найти первообразную для функции $y = f(x)$, график которой проходит через точку $M\ (x;y)$.	
$y = 2sin 2x - 5cos 5x$; $A\left(-\frac{\pi}{6};0\right)$.	$y = cos\frac{x}{2} + 4sin 2x$; $B\left(\frac{\pi}{3};0\right)$.
3. Вычислить интегралы.	
$\int 4\sqrt[3]{x}dx$; $\int (1-2x)^4 dx$.	$\int \frac{dx}{2x^2\sqrt{x}}$; $\int \left(1-\frac{x}{2}\right)^5 dx$.

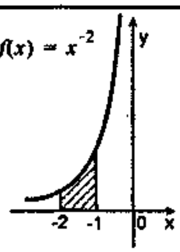
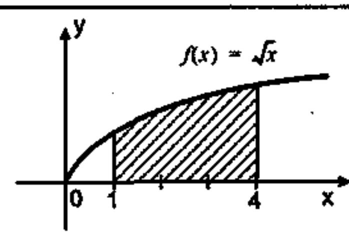
В-V	12 баллов	В-VI

1. Построить график функции $y = f(x)$. Найти общий вид её первообразной.	
$y = x^2 + 4x$.	$y = 6x - x^2$.
2. Найти первообразную для функции $y = f(x)$, график которой проходит через точку $M\ (x;y)$.	
$y = sin^2 2x cos^2 2x$; $A\left(\frac{\pi}{8};0\right)$.	$y = (cos^2 2x - sin^2 2x)^2$; $A\left(\frac{\pi}{16};0\right)$.
3. Вычислить интегралы.	
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x}{4}}}$; $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$; $\int \frac{x^2\sqrt{x^{-1}}}{\sqrt[3]{x^{1,5}}}dx$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-2

Тема. Применение интеграла для вычисления площадей плоских фигур

B-I	7 баллов	B-II
1. Вычислить площадь фигуры, заштрихованной на рисунке.		
		
2. Найти.		
а) $\int\limits_0^3 (x^2-2x)dx$, б) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2}$.		а) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

B-III	9 баллов	B-IV
1. Вычислить площадь фигуры, заштрихованной на рисунке.		
		
2. Найти.		
а) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$, б) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{7dx}{\cos^2 3x}$		а) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^3 \frac{dx}{\sqrt{10-3x}}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{5dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$
3. Решить неравенство.		
$\int\limits_2^a 2xdx < 5$		$\int\limits_1^a 2xdx > 3$.

B-V	12 баллов	B-VI
1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (сделав рисунок):		
$y = 0;\ y = 2x^2+1;\ x = -1;\ x = 1.$		$y = 2x^2;\quad y = 8.$
2. Найти.		
$\int\limits_2^3 \frac{(x^2-4)(x^2-1)}{x^2+x-2}dx$.		$\int\limits_{-1}^1 \frac{(9-x^2)(x^2-16)}{x^2-7x+12}dx$.
3. Решить неравенство.		
$\int\limits_{-1}^a 2xdx > 8$.		$\int\limits_2^a 2xdx > 5$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-3-1

Тема. Интеграл и его применение

В-I	7 баллов	В-II
1. Найти общий вид первообразных для функции $y = f(x)$.		
$y = 7x-3$; $y = x^4 - 2\sin x$; $y = -\frac{1}{x^3}$.		$y = 3x-1$; $y = x^5 + 6\cos x$; $y = \frac{1}{x^2}$.
2. Вычислить интегралы.		
$\int\limits_{-2}^{0} (x^2+2x)dx$; $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$;		$\int\limits_{-1}^{0} (x^2+4x-1)dx$; $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$.
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.		
$y = 2x - x^2$; $y = 0$.		$y = 4x - x^2$; $y = 0$.

В-III	9 баллов	В-IV
1. Найти общий вид первообразных для функции $y = f(x)$.		
$y = 2-x$; $y = x^8 - \sin 2x$; $y = \frac{2}{x^3}$.		$y = 1+x$; $y = 2x^9 - \cos\frac{x}{4}$; $y = \frac{1}{5x^{10}}$.
2. Вычислить интегралы.		
$\int\limits_{-1}^{2}\left(3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)dx$; $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} + 2\cos x\right)dx$.		$\int\limits_{-2}^{1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+3}} - 3x^2\right)dx$; $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin x - \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx$.
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.		
$y = x^2+2$; $y = x+4$.		$y = -x^2+4$; $y = x-2$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Найти общий вид первообразных для функции $y = f(x)$.		
$y = (2x+5)^3$; $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \sin\frac{x}{4}$.		$y = (7-9x)^5$; $y = \frac{1}{\sqrt{1-3x}} + 2\cos 7x$.
2. Вычислить интегралы.		
$\int\limits_{1}^{4}(\sqrt{x} - 3x^2)dx$; $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin 4x \cos 2x dx$.		$\int\limits_{1}^{4}(4x^3 - 3x\sqrt{x})dx$; $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} \cos 4x \cos 2x dx$.
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.		
$y = -x^2+4$; $y = x^2-2x$.		$y = -x^2+2x$; $y = x^2-4$.

1. Найти общий вид первообразной для функции $f(x) = |x-1|$.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{если } x<1, \\ x-1, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

На промежутке $(-\infty;1)$ первообразная имеет вид $F_1(x) = x - \frac{x^2}{2} + c_1$.

На промежутке $[1;+\infty)$: $F_2(x) = \frac{x^2}{2} - x + c_2$.

$F_2(1) = F_1(1)$; $\quad 1 - \frac{1}{2} + c_1 = \frac{1}{2} - 1 + c_2$; $\quad c_2 = c_1 + 1$.

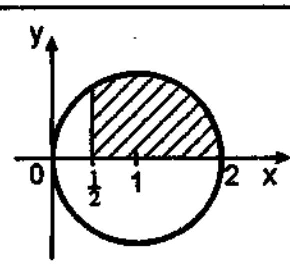
$$F(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 + c, & \text{если } x<1, \\ \frac{1}{2}x^2 - x + c + 1, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

Ответ: $F(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 + c, & \text{если } x<1, \\ \frac{1}{2}x^2 - x + c + 1, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{2x-x^2}\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{2x-x^2}\,dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx.$$



Искомый интеграл равен половине площади сегмента дуги в $\frac{4\pi}{3}$ радиан.

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{2x-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{1}{2}\right|^2 \cdot \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y-1 = cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$, касательной к ней в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{6}$ и прямой $y = \frac{4x}{\pi}-\frac{2}{3}$.

Решение.

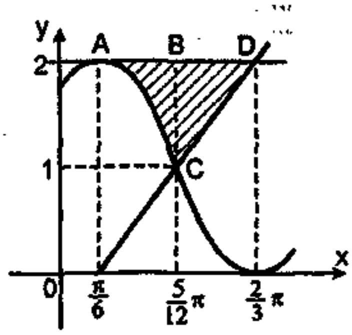
$x \in (-\infty;1)$.

Уравнение касательной имеет вид:

$y = y_0+y'(x_0)(x-x_0)$; $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $y_0 = 1+cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right) = 2$;

$y' = -2sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$; $y'(x_0) = 0$;

$y-2 = 0$ — уравнение касательной.



Точка A имеет координаты $A\left(\frac{\pi}{6};2\right)$.

Найдем координаты точки D:

$$\begin{cases} y = 2, \\ y = \frac{4x}{\pi}-\frac{2}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ x = \frac{2}{3}\pi. \end{cases}$$

$D\left(\frac{2}{3}\pi;2\right)$.

Найдем координаты точки C:

$$\begin{cases} y-1 = cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \\ y = \frac{4x}{\pi}-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{5}{12}\pi;1\right).$$

Значит, $B\left(\frac{5}{12}\pi;2\right)$.

Искомая площадь $S = S_1+S_2$, где S_1 — площадь криволинейного треугольника ABC, S_2 — площадь ΔBCD.

$$S_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{12}\pi}\left(2-1-cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right)dx = \left(x-\frac{1}{2}sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{12}\pi} = \frac{5}{12}\pi-\frac{1}{2}sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}BC\cdot BD = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Ответ: $S = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi-\frac{1}{2}$.

4. Найти первообразную для функции $f(x) = 3x^2 - x + \cos\pi x$, график которой проходит через точку $M\left(1;\frac{1}{2}\right)$.
Решение.
Первообразной для функции $3x^2$ является x^3, для функции x — функция $\frac{1}{2}x^2$, а для функции $\cos\pi x$ — функция $\frac{1}{\pi}\sin\pi x$. Поэтому функция $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\pi}\sin\pi x$ — первообразная для функции $f(x)$, следовательно, $\int(3x^2 - x + \cos\pi x)dx = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\pi}\sin\pi x + c$. Среди этих первообразных условию задачи удовлетворяет та, для которой $F(1) + c = \frac{1}{2}$: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin\pi + c = \frac{1}{2}$, $c = 0$, то есть $F(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\pi}\sin\pi x$.
5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi}\cos^4 x dx$.
Решение.
Запишем подинтегральную функцию $\cos^4 x$ в виде $\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) =$ $= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$ Первообразной для функции $\cos^4 x$ является функция $F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$. Применив формулу Ньютона-Лейбница, имеем $\int\limits_0^{\pi}\cos^4 x dx = F(\pi) - F(0) = \frac{3}{8}\pi$.
6. Найти все положительные числа a, для каждого из которых $\int\limits_0^{a}(2 - 4x + 3x^2)dx \le a$.
Решение.
Первообразной для функции $f(x) = 2 - 4x + 3x^2$ является функция $F(x) = 2x - 2x^2 + x^3$. Поэтому $\int\limits_0^{a}(2 - 4x + 3x^2)dx = F(a) - F(0) = 2a - 2a^2 + a^3$ и неравенство из условия задачи можно записать так: $2a - 2a^2 + a^3 \le a$, $a^3 - 2a^2 + a \le 0$, $a(a-1)^2 \le 0$. Поскольку по условию задачи $a > 0$, то среди положительных чисел неравенство $a(a-1)^2 \le 0$ удовлетворяет только одному числу: $a = 1$.
Ответ: $a = 1$.

7. Вычислить объем тела, образованного поворотом плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = \cos x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и осью абсцисс, вокруг оси абсцисс.

Решение.

По формуле вычисления объема тела вращения находим:

$$V = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \pi\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

8. Вычислим объем тела, образованного вследствие поворота около прямой $y = 1$ плоской фигуры, которая ограничена графиком функции $y = 1+\sin x$ и касательными к этому графику, проведенными в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = \pi$.

Решение.

Искомый объем равен объему тела, образованного поворотом около оси абсцисс плоской фигуры, которая ограничена графиком функции $y = \sin x$ и касательными, проведенными к этому графику в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = \pi$.

Равенство касательных $y = x$ и $y = \pi - x$. Поскольку фигура поворота симметрична относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, то искомый объем:

$$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2-\sin^2 x)dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2-\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = 2\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right).$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ АБИТУРИЕНТА

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$y = \frac{1}{2}+\sin^2 x, \quad x = 0; \quad x = \pi; \quad y = 0.$

2. Решить уравнение.

$$\int_0^x \cos 2t dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x.$$

3. Найти все значения a, для которых выполняется неравенство.

$$\int_0^1 (a^2+4ax+4x^3)dx > 25.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

$y = \frac{|4-x^2|}{4}$ та $y = 7-|x|$.

5. Вычислить интегралы.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}; \quad \int_0^{\pi} 8\cos^2 x(1-\sin^2 x)dx.$$

6. Вычислить площадь фигуры, которая ограничена графиком функции $y = x^2$ и касательной к нему, проведенной в точке с абсциссой $x = 1$ и осью абсцисс.

§4. Производная и первообразная показательной, степенной и логарифмической функций

Формулы дифференцирования

$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$	$(0,3^x)' = 0,3^x \ln 0,3$.
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_\alpha x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_7 x)' = \frac{1}{x \ln 7}$.
Если $u = y(x)$, то $(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(e^{\sqrt{x}})' = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.
$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	$(7^{x^2+1})' = 7^{x^2+1} \cdot \ln 7 \cdot (x^2+1)' = 2x \cdot 7^{x^2+1} \cdot \ln 7$.
$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	$(\ln(\cos x))' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$.
$(\log_\alpha u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$	$(\log_5(3x+1))' = \frac{1}{(3x+1) \cdot \ln 5} \cdot 3 = \frac{3}{(3x+1)\ln 5}$.
$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	$(\sqrt[3]{2x+1})' = \left((2x+1)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 2 = \frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{2}{3}} =$ $= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$.

Таблица интегралов

$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{4x-12} dx = \frac{1}{4} e^{4x-12} + c$.
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $a > 0; a \neq 1$	$\int 8^{\frac{x}{4}+5} dx = \frac{4 \cdot 8^{\frac{x}{4}+5}}{\ln 8} + c$.
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2} \ln\lvert 2x+3\rvert + c$.
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \alpha \neq -1$	$\int x^{1,5} dx = \frac{x^{2,5}}{2,5} + c = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x^5} + c = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + c$.

УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

1. Под каким углом кривая $y = \ln x$ пересекает ось Ox?

Решение.

Найдем точку пересечения оси Ox с графиком функции $y = \ln x$: $\ln x = 0$; $x = 1$.
Вычислим угловой коэффициент касательной в точке $x_0 = 1$; $k = y'(x_0)$.
$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$; $y'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

Найдем угол, который образует касательная с Ox: $tg\alpha = y'(x_0)$; $tg\alpha = y'(1) = \frac{1}{1} = 1$;
$\alpha = 45°$ — искомый угол.

Ответ: $45°$.

2. Исследовать на монотонность функцию $y = \frac{x^2}{2} - 3\ln(x-2)$.

Решение.

1) $D(y)$: $x - 2 > 0$; $x > 2$; $x \in (2; +\infty)$.

2) $y' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 3 \cdot \frac{1}{x-2} = x - \frac{3}{x-2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{x-2} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-2}$.

3) y' существует для всех $x \in D(y)$;
$y' = 0$; если $x = 3$; $x = -1$.

4) Знак производной на каждом из интервалов области определения покажем на рисунке.

5) $y' > 0$, $x \in (3; +\infty)$; $y' < 0$; $x \in (2;3)$.

Функция возрастает на промежутке $[3;+\infty)$, а убывает на $(2;3]$.

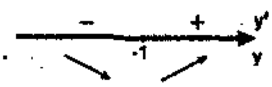
Ответ: $[3;+\infty)$ — промежуток возрастания,
$(2;3]$ — промежуток убывания.

3. Исследовать функцию $y = x \cdot e^x$ на экстремум.

Решение.

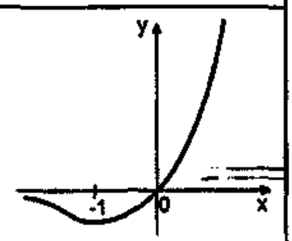
$D(y) = R$; $y' = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$,

$y' = 0$; $x = -1$; y' существует для всех $x \in R$.



$x = -1$ — точка минимума.

$y_{min} = y(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}$ (график функции на рисунке).



Ответ: $y_{min} = -\frac{1}{e}$.

4. Найти наибольшее значение функции $y = 2^{3-x}$ на отрезке $[4;6]$.

Решение.

$y' = 2^{3-x} \cdot (3-x)' = -2^{3-x} = \frac{-2^3}{2^x}$.

Поскольку $y' < 0$ для всех $x \in R$, то функция не имеет критических точек.

$y(4) = 2^{3-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$; $y(6) = 2^{3-6} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$; $\max\limits_{[4;6]} y(x) = y(4) = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\max\limits_{[4;6]} y(x) = y(4) = \frac{1}{2}$.

5. Построить графики функций.

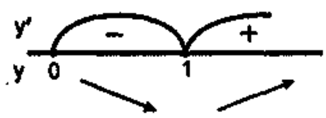
а) $y = x - 1 - \ln x$

1) $D(y): (0; +\infty)$.

Поскольку $x > 0$, то с осью Oy график не пересекается.

$y = 0 \Rightarrow x - 1 - \ln x = 0$.

2) $y' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$;

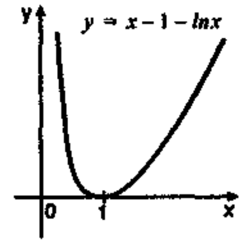


$y' = 0 \Rightarrow x = 1$.

$y(1) = 0$.

3) Нуль функции: $x = 1$.

$E(y): [0; +\infty)$.



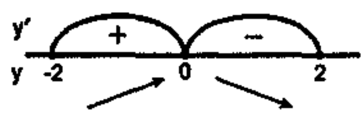
б) $y = \ln(4 - x^2)$

1) $D(y): (-2;2); x = 0 \Rightarrow y = \ln 4$;

$y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

2) Функция чётная.

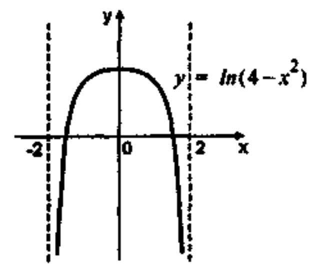
3) $y' = -\frac{2x}{4 - x^2}$;



$y' = 0 \Rightarrow x = 0$.

$E(y): (-\infty; \ln 4)$.

4)



$x = \pm 2$ — вертикальные асимптоты

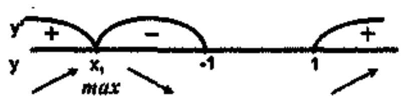
в) $y = \ln(x^2 - 1) + x$

1) $D(y): (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;

2) $y' = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$;

$y' = 0 \Rightarrow x_1 = -1 - \sqrt{2}$;

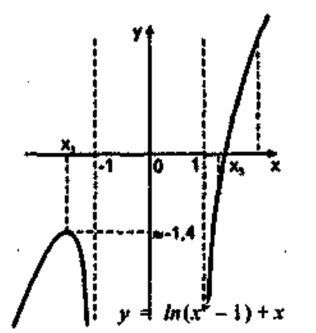
$x_2 = -1 + \sqrt{2} \notin D_1$.



Находим нуль функции:

$y(1;1) \approx -0,4; y(2) \approx 3,1; (x_3 \approx 1,2)$.

3)

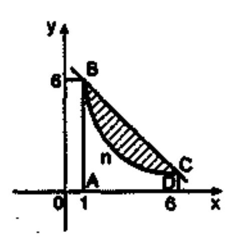


6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{6}{x}$ и $y = 7 - x$:

Построим заданные линии и заштрихуем фигуру, площадь которой нужно найти.

$S = S_{ABCD} - S_{AB_nCD}$.

Пределы интегрирования: $\frac{6}{x} = 7 - x$; $\begin{cases} x \neq 0, \\ x^2 - 7x + 6 = 0. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1;\ a = 1; \\ x_2 = 6;\ b = 6. \end{array}\right.$



$$= \int_1^6 (7 - x)dx - \int_1^6 \frac{6}{x}dx = \left(7x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^6 - 6\ln|x|\Bigg|_1^6 =$$

$$\left(42 - \frac{36}{2}\right) - \left(7 - \frac{1}{2}\right) - (6\ln 6 - 6\ln 1) = 24 - 6{,}5 - 6\ln 6 = 17{,}5 - 6\ln 6.$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти производные функции, область определения функции.

а) $y = e^{6x+3}$; $y = 10^{x}$; $y = 12^{\sin x}$;

б) $y = \ln(x^4 - 2x)$; $y = \log_2 5x$; $y = \log_4(x^2 - 2x - 3)$;

в) $y = e^{\sqrt{x^2-1}}$; $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$;

г) $y = x^{\sqrt{2}}$; $y = x^{e}$; $y = x^{-\pi}$;

д) $f(x) = x^5 e^x$; $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$; $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$;

е) $f(x) = e^{-2x}\cos 3x$; $f'(0) = ?$ $f(x) = e^{-x}\sin 2x$; $f'(0) = ?$

2. Найти множество первообразных функций.

$y = e^{2x-3}$; $y = 2^{0,5x+1}$; $y = \frac{2}{4x-1}$; $y = \frac{6}{(5x-7)^3}$; $y = \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$;

$f(x) = \frac{2x+3}{5x}$; $f(x) = \frac{(3x-2)^2}{x}$.

3. Вычислить интеграл.

а) $\int_1^2 \frac{dx}{2-3x}$; б) $\int_1^3 e^{2x}dx$; в) $\int_2^4 \frac{(2x+3)^2}{x}dx$; г) $\int_2^{14} \frac{dx}{x\ln 7}$.

4. Найти критические точки, промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции.

а) $y = e^x - xe$; в) $y = 2 - e^x + xe$;

б) $y = x - 2\ln x$; г) $y = 0,5x^2 - \ln x$; д) $y = 3xe^{2-x}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

а) $y = \frac{1}{x}$; $x = 1$; $x = 2$; в) $xy = 6$; $x + y = 5$;

б) $y = e^x$; $x = 2$; $x = 4$; г) $xy = 3$; $x + y = 4$;

6. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2^{x-3}$, $x_0 = 4$.

7. Найти угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ и к оси абсцисс в точке x_0:

а) $f(x) = e^{2x}$; $x_0 = 0$; б) $f(x) = 3^x + 5$; $x_0 = 1$.

8. Найти производные функции.

а) $y = \ln(\cos 2x)$; б) $y = \log_3(3^x + x^2)$.

9. Исследовать на монотонность и экстремумы функцию $y = x \cdot e^{-x}$ и построить ее график.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-4-1

В-I	В-II	В-III	В-IV
1. Найти промежутки возрастания и убывания функции.			
$f(x) = x \cdot e^{2x}$.	$f(x) = x \cdot e^{-3x}$.	$y = \ln x - x$.	$y = \dfrac{2\ln x}{x}$.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.			
$y = 0;\ y = \dfrac{1}{x}$ $x = 1;\ x = 3$.	$y - 0;\ y = \dfrac{1}{x}$ $x = 2;\ x = 4$.	$y = \dfrac{4}{x}$ и $x = 1;\ y = 1$.	$y = \dfrac{2}{x}$ и $x = 1;\ y = \dfrac{1}{2}$.

В-V	В-VI
1. Найти промежутки возрастания и убывания функции.	
$y = -x^2 + \ln(1 - 2x)$.	$y = 1,5\ln(x^2 - 1) - 2x$.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.	
$y = \dfrac{2}{x}$ и $y = 3 - x$.	$y = \dfrac{3}{x}$ и $y = 4 - x$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-4-1

В-I	7 баллов	В-II
	1. Найти производную функции.	
а) $y = e^x - 6^x$; б) $y = ln(x-1) + x^{\sqrt{3}}$.		а) $y = 2e^x - \frac{1}{3}\cdot 7^x$; б) $y = ln(1-x) + x^{1+\sqrt{2}}$.
	2. Найти общий вид первообразных для функции.	
а) $y = e^x - 3x$; б) $y = \frac{1}{x+1} + (x+7)^{\sqrt{5}}$.		а) $y = e^{2x} + 2^x$; б) $y = \frac{1}{3x-1} + (x-3)^{\sqrt{6}}$.
	3. Составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$.	
$y = e^{2x}$, $x_0 = 1$.		$y = 0,5e^{x-1}$, $x_0 = 2$.

В-III	9 баллов	В-IV
	1. Найти производную функции.	
а) $y = e^{3x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$; б) $y = ln(3x-1) + (2x+7)^{\sqrt{5}}$.		а) $y = e^{-0,3x} + 2^{1-2x}$; б) $y = ln(2x-1) - (2x-3)^{\sqrt{6}}$.
	2. Найти общий вид первообразных для функции.	
а) $y = e^{1-3x} + 4^{\frac{x}{3}+1}$; б) $y = \frac{5}{2x-1} + (0,5x-3)^{\sqrt{7}}$.		а) $y = 7\cdot e^{7x+2} - 3^{-0,5x+1}$; б) $y = \frac{10}{5-0,5x} + (0,25x+4)^{\sqrt{3}}$.
	3. Составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$.	
$y = log_2(x+3)$, $x_0 = 1$.		$y = log_3(2x+1)$, $x_0 = 1$.

В-V	12 баллов	В-VI
	1. Найти производную функции.	
а) $y = e^{x^2-1} + 4^{2-3x}$; б) $y = ln(3x+1) + log_2(3x-1)$.		а) $y = e^{x^2+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{0,5x+1}$; б) $y = ln(3x+1) + log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$.
2. Найти первообразную для функции $y = 2^x + e^{-x}$, график которой проходит через точку $M(1;2)$.		2. Найти первообразную для функции $f(x) = 3^{-x} + e^x$, график которой проходит через точку $M(-1;3)$.
3. При каких значениях a график функции $y = ax$ будет касательной к графику функции $y = e^x$?		3. При каких значениях a график функции $y = ax+1$ будет касательной к графику $y = lnx$?
	4. Вычислить.	
а) $\int_2^4 \frac{dx}{3x+4}$; б) $\int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx$.		а) $\int_1^3 \frac{dx}{2x+3}$; б) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

1. Найти производную функции $y = x^x$.

Решение.

Прологарифмируем левую и правую части по основанию e.

$lny = ln(x^x)$,

$lny = x lnx$.

Найдем производную левой и правой частей равенства.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = x' lnx + x \cdot \frac{1}{x} = lnx + 1,$$

$$y' = (1 + lnx) \cdot y = (1 + lnx) \cdot x^x.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции и $y = 2\sqrt{x}$ и касательной, проведенной к графику функции $y = 1 + lnx$ в точке с абсциссой $x = 1$.

Решение.

Уравнение касательной $y = 1 + 1(x - 1) = x$.

Искомая площадь равна $S = \int\limits_0^4 (2\sqrt{x} - x)dx = \frac{8}{3}$.

Ответ: $\frac{8}{3}$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = e^{-2\sqrt{3} \cdot x} \cdot sin2x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

$$y' = e^{-2\sqrt{3}x} \cdot (-2\sqrt{3}) \cdot sin2x + 2cos2x \cdot e^{-2\sqrt{3} \cdot x} =$$

$$= e^{-2\sqrt{3}x}(-2\sqrt{3}sin2x + 2cos2x) = -4e^{-2\sqrt{3}x}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sin2x - \frac{1}{2}cos2x\right) =$$

$$= -4e^{-2\sqrt{3}x}sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$y' = 0; \quad sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0; \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;$$

промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит точка $x = \frac{\pi}{12}$.

$$y(0) = e^{-2\sqrt{3} \cdot 0} \cdot sin0 = 0;$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-2\sqrt{3}\frac{\pi}{2}}sin\pi = 0;$$

$$y\left(\frac{\pi}{12}\right) = e^{-2\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{12}}sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi} > 0.$$

$$\max_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}},\ \min_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y(x) = y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

4. Найти наибольшее значение функции $y = 9 \cdot 3^x \cdot 3^{-x^2}$.

Решение.

$y = 3^2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x^2} = 3^{-x^2+x+2}; \quad D(y) = R;$

$y' = 3^{-x^2+x+2} \cdot ln3 \cdot (-2x+1);$

$y' = 0; \quad x = \frac{1}{2};$

$x > \frac{1}{2}, \quad y' < 0;$

$x < \frac{1}{2}, \quad y' > 0.$

Следовательно, $x = \frac{1}{2}$ — точка максимума,

$y_{max} = 3^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2} = 3^{\frac{9}{4}}.$

Ответ: $3^{\frac{9}{4}}$.

5. При каких значениях a уравнение $ax^2 = lnx$ имеет один корень?

Решение.

Построим график функции $f(x) = \frac{lnx}{x^2}$.

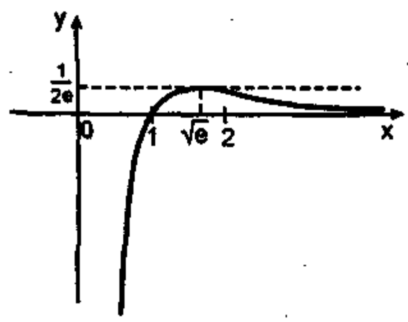
1) $D(f) = (0; +\infty)$.

2) $f'(x) = \frac{1 - 2lnx}{x^3}$.

3) $f'(x) = 0; \quad lnx = \frac{1}{2}; \quad x = e^{\frac{1}{2}}$.

4)

x	$\left(0; e^{\frac{1}{2}}\right)$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\left(e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	↗	max	↘



$y_{max} = y\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2e}$

Уравнение имеет один корень при $a \leq 0$ и при $a = \frac{1}{2e}$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ АБИТУРИЕНТА

1. Найти производную функции $y = (1+4x)^{ctgx}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2$ и касательной, проведенной к графику функции $y = 2+e^{-x}$ в точке с абсциссой $x = 0$.

3. При каких значениях a уравнение $x = ae^x$ не имеет корней?

4. При каком a графики функций $y = a^{\frac{x-|x|}{2}}$ и $y = 2x^2$ ограничивают фигуру площадью $\frac{1}{3}$?

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{6}x\ln 9$ на отрезке $[1;3]$.

6. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = e^x - x - 1$ и доказать неравенство: $e^x > x+1$ при $x > 0$.

7. Найти производную функции $f(x) = \sin x^{\cos x}$, $(\sin x^{\cos x} = e^{\cos x \ln \sin x}, \sin x > 0)$.

8. При каких значениях $a > 0$ выполняется неравенство $\int_{-a}^{a} e^x dx > \frac{3}{2}$?

9. Исследовать функцию и построить её график.
$y = xe^{-x}$; $y = xe^{-x^2}$; $y = x^2e^{-x^2}$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3^{2x} + 2\cdot 3^{3-x}$ на отрезке $[-1;2]$.

11. Доказать, что данные уравнения имеют только одно решение и найти его:
$e^x = x\cdot e$; $e^x - 1 = x$; $x = 1+\ln x$.

12. Построить график функции $y = x\ln^2 x$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$.

14. Найти промежутки возрастания функции $y = x^3 - 9x^2 + 33x - 18\ln x - 1$.

15. Найти наименьшее значение функции $y = 2e^x + 5e^{-x} - 3x - 6$.

16. Построить графики функций:
$y = 2\ln x - x^2$; $y = x^2\ln^2 x$; $y = \frac{x}{\ln x}$.

§5. Комплексные числа и действия с ними

Комплексные числа

Число, которое удовлетворяет равенству $x^2 = -1$, обозначают буквой i и называют **мнимой единицей**. Таким образом, $i^2 = -1$.	
Числа вида $a+bi$, где a и b — любые действительные числа, i — мнимая единица, называются **комплексными**. a — действительная часть комплексного числа, bi — мнимая часть комплексного числа, b — коэффициент при мнимой части.	$5+2i$ — комплексное число. 5 — действительная часть. $2i$ — мнимая часть. 2 — коэффициент при мнимой части.
Числа вида $0+bi$ называют **чисто мнимыми** числами. $0+bi = bi$.	$-12i$ — чисто мнимое число. $-12i = 0+(-12i)$.
Числа вида $a+0i$ отождествляют с **действительными** числами $a+0i = a$; $0 = 0+0i$. 0 — единственное комплексное число, которое является и действительным, и чисто мнимым.	7 — действительное число. $7 = 7+0i$.
Комплексные числа вида $a+bi$ и $a-bi$ называют **сопряженными**.	$-2+3i$ и $-2-3i$, $6i$ и $-6i$, 3 и -3.
Комплексные числа вида $a+bi$ и $-a-bi$ называют **противоположными**.	$-\sqrt{2}-\sqrt{3}i$ и $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$.
Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ называют **равными**, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимых частях $a+bi = c+di \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$. Понятий «больше», «меньше» для комплексных чисел не существует.	Найти действительные числа x и y из уравнения $(x-y)+(2x+y)i = -3+3i$. Решение. На основании равенства комплексных чисел имеем: $\begin{cases} x-y = -3; \\ 2x+y = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} 3x = 0; \\ 2x+y = 3. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0; \\ y = 3. \end{cases}$ Ответ $x = 0$; $y = 3$.
Действия над комплексными числами в алгебраической форме $(a+bi)$	
Сложение	
$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$, $(a+bi)+(a-bi) = 2a$ — сумма двух взаимно сопряженных комплексных чисел является действительным числом.	$(5+2i)+(2-3i) =$ $= (5+2)+(2+(-3))i = 7-i$ $(1-2i)+(1+2i) = 2$.
Вычитание (исходя из определения, вычитание рассматривается как действие, обратное сложению).	
$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$.	$(10+2i)-(3-4i) =$ $= (10-3)+(2-(-4))i = 7+6i$.

Умножение

$(a+bi)\cdot(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 =$ $= (ac-bd)+(ad+bc)i.$ Умножение комплексных чисел выполняется как умножение многочленов с учетом, что $i^2 = -1$. $(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2+b^2$ — произведение двух взаимно сопряженных выражений является числом действительным. $a^2+b^2 = (a+bi)(a-bi).$	$(5+2i)(3-4i) = 15-20i+6i-8i^2 =$ $= 15+8-14i = 23-14i$ $(5-3i)(5+3i) = 25+9 = 34.$ Разложить на комплексные множители $a^4+b^2 = (a^2+bi)(a^2-bi).$

Деление
(действие, обратное умножению)

$\dfrac{a+bi}{c+di}$ $(c+di\neq 0)$. Умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное со знаменателем $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} =$ $= \dfrac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$	$\dfrac{7-i}{3+i} = \dfrac{(7-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} =$ $= \dfrac{21-7i-3i+i^2}{9+1} = \dfrac{21-10i-1}{10} =$ $= \dfrac{20-10i}{10} = \dfrac{20}{10}-\dfrac{10i}{10} = 2-i.$

Степени мнимой единицы

$i^0 = 1$; $i' = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^{4k} = 1; i^{4k+1} = i; i^{4k+2} = -1; i^{4k+3} = i; 4^k = 1$ $k = 0;\pm1;\pm2$ і т.д.	$i^{17} = i^{4\cdot4+1} = i^1 = i.$ $i^{39} = i^{9\cdot4+3} = i^3 = -i.$

Возведение в степень

$(a+bi)^n = \underbrace{(a+bi)\cdot(a+bi)\cdot\ldots\cdot(a+bi)}_{n \text{ раз}}, n\in N$ $(a+bi)^{-n} = \dfrac{1}{(a+bi)^n}.$	$(1+i)^2 = 1^2+2i+i^2 = 2i.$ $(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i.$

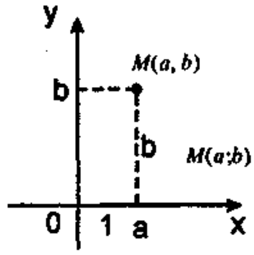
Извлечение корня

$\sqrt{-1} = \pm i.$ $\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a}\cdot i$; $\sqrt{a}$ — арифметический корень $(a>0)$. $^*\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$ знак «+» в скобках, если $b>0$, знак «-» в скобках, если $b<0$.	$\sqrt{-4} = \pm2i$; $\sqrt{25} = \pm5$, $\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$, $\sqrt{5+12i} =$ $= \pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right) =$ $= \pm\left(\sqrt{\dfrac{13+5}{2}}+i\sqrt{\dfrac{13-5}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\dfrac{18}{2}}+i\sqrt{\dfrac{8}{2}}\right) =$ $= \pm(\sqrt{9}+i\sqrt{4}) = \pm(3+2i).$

Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа

Первый способ.

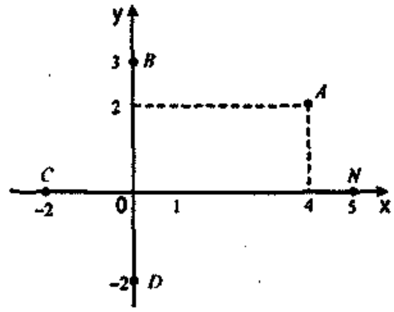
Комплексное число $a+bi$ геометрически изображают точкой $M(x;y)$ в прямоугольной системе координат: $x = a$; $y = b$.



Ось абсцисс, на которой размещены точки, соответствующие действительным числам ($a+0i$), называется **действительной осью**.

Ось ординат, на которой размещаются все мнимые числа, называется **мнимой осью**.

$0 = 0+0i$ — изображается началом координат.



$A\ (4;2) \to 4+2i$;

$B\ (0;3) \to 0+3i = 3i$;

$-2 \to C\ (-2;0)$;

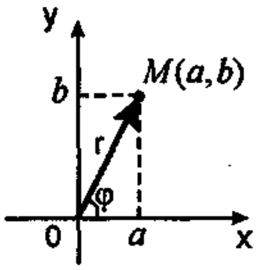
$-2i \to D\ (0;-2)$;

$N\ (5;0) \to 5+0i$.

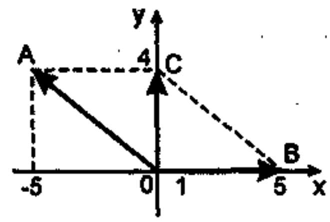
Второй способ.

Комплексное число $a+bi$ изображается в системе координат радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$

$O(0;0)$; $M(a;b)$.



Построить векторы, которые изображают слагаемые и сумму комплексного числа $(-5+4i)+5$.



Слагаемым соответствуют радиусы-векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OM}$, а сумме — радиус-вектор $\overrightarrow{OC}$.

Длина вектора, изображающего комплексное число, называется **модулем этого комплексного числа** и обозначается буквой r. Из рисунка видно, что $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

Модуль действительного числа совпадает с его абсолютным значением.

Сопряженные комплексные числа $a+bi$ и $a-bi$ имеют один и тот же модуль.

Модуль чисто мнимого числа равен абсолютному значению коэффициента.

Комплексные числа Z, которые имеют один и тот же модуль $|Z| = r$, соответствуют точкам комплексной плоскости, которые расположены на окружности с радиусом r и с центром в начале координат.

Найти модули комплексных чисел $2-i$; $-i$; $2i$.

Решение.

$|2-i| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$,

$|-i| = |-1| = 1$; $|2i| = |2| = 2$.

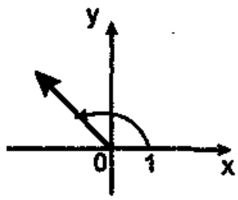
Угол φ между положительным направлением оси абсцисс и вектором OM, изображающим комплексное число $a+bi$, называется аргументом комплексного числа ($0 \le \varphi < 360°$).

Аргумент φ комплексного числа $a+bi$ связан с a и b формулой $tg\ \varphi = \frac{b}{a}$;

аргументом действительного положительного числа является $0°$; действительного отрицательного числа — $180°$; аргументом мнимых чисел bi является $90°$; аргументом чисел $-bi$ является $270°$.
Для нуля аргумент не определен.

Найти аргумент комплексного числа $-3+3i$.

Решение.



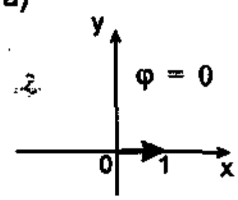
$a = -3; \quad b = 3;$

φ — угол II четверти.

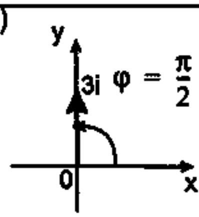
$tg\ \varphi = \frac{3}{-3} = -1; \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}.$

Найти аргументы чисел а) 1; б) -2; в) $3i$; г) $-2i$.

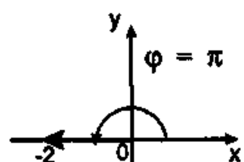
а)



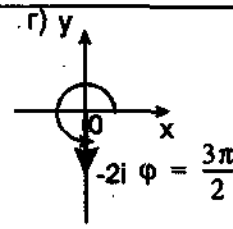
б)



в)

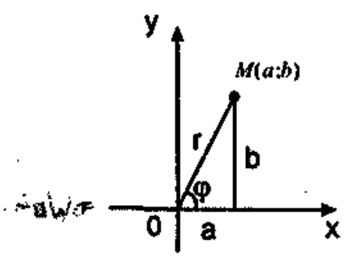


г)



Тригонометрическая форма комплексного числа

$Z = a+bi$ — алгебраическая форма записи комплексного числа.



$a = r\cos\varphi \ \left(\cos\varphi = \frac{a}{r}\right),$

$b = r\sin\varphi \ \left(\sin\varphi = \frac{b}{r}\right),$

$Z = a+bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi =$
$= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — это выражение называется **тригонометрической формой** комплексного числа z.

$r = \sqrt{a^2+b^2}; \quad tg\ \varphi = \frac{b}{a}.$

Записать числа
$Z_1 = -1+i; \quad Z_2 = -2; \quad Z_3 = i$
в тригонометрической форме.

Решение.

а) $|Z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};$

$a = -1; \quad b = +1; \quad \varphi$ — II четверть;

$tg\ \varphi = \frac{1}{-1} = -1; \quad \varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$

$Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$

б) $|Z_2| = 2; \quad \varphi = \pi; Z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi);$

в) $|Z_3| = 1; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}; Z_3 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$

Записать число в алгебраической форме.

$4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2+2\sqrt{3}i.$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Сложение и вычитание комплексных чисел удобнее выполнять в алгебраической форме. Для остальных операций более удобна тригонометрическая форма.

Умножение $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$ $= r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.	$2(\cos 36^\circ + i\sin 36^\circ)\cdot 3(\cos 54^\circ + i\sin 54^\circ) =$ $= 2\cdot 3(\cos(36^\circ+54^\circ) + i\sin(36^\circ+54^\circ)) =$ $= 6(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = 6i$.
Деление $\dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$ $= \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.	$\dfrac{3(\cos\pi + i\sin\pi)}{5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} =$ $= 0,6\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$ $= 0,6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 0,6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$ $= (-0{,}3 + 0{,}3\sqrt{3}i)$.
Возведение в степень $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ **— формула Муавра.**	$(2(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ))^3 =$ $= 2^3(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 8\cdot\left(\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$ $= 4 + 4\sqrt{3}i$.
Извлечение корня n-ой степени $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$ $= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$. $\sqrt[n]{r}$ — арифметический корень $k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots n-1$. Корень степени n в множестве комплексных чисел имеет n различных значений. Все значения $\sqrt[n]{0}$ равны между собой и равны 0. Все n значения корня n-ой степени изображаются точками на окружности с центром в начале координат, радиус которой равен $\sqrt[n]{r}$. Эти точки — вершины правильного n-угольника.	Найти $\sqrt[3]{1}$. **Решение.** $1 = \cos 0^\circ + i\sin 0$. $\sqrt[3]{1} = \sqrt{\cos 0^\circ + i\sin 0} =$ $= \sqrt[3]{1}\cdot\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right)$. $k = 0;\ 1;\ 2;$ $k = 0;\ u_0 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0) = 1;$ $k = 1.\ u_1 = 1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$ $= 1\cdot\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$. $k = 2.\ u_2 = 1\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) =$ $= 1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$. Ответ: $1; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

1. Решить уравнение в множестве комплексных чисел: $x^4 + 16 = 0$.	
Решение.	
Прибавим и отнимем $8x^2$. $x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2+4)^2$ Разложим на множители разности квадратов: Заменим равносильной совокупностью квадратных уравнений:	$x^4 + 8x^2 + 16 - 8x^2 = 0$, $(x^2+4)^2 - 8x^2 = 0$. $(x^2 + 4 - \sqrt{8}x)(x^2 + 4 + \sqrt{8}x) = 0;$ $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0; \\ x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-16}}{2}; \\ x_{3,4} = \dfrac{-2\sqrt{2} + \sqrt{8-16}}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i}{2}; \\ x_{3,4} = \dfrac{-2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i; \\ x_{3,4} = -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i. \end{array}\right.$
Ответ:	$\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i;\ -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i$.
2. Решить уравнение: $Z^3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.	
Решение.	
Правую часть запишем в тригонометрической форме и используем формулу извлечения корня n-ой степени:	$Z = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt[3]{\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}} =$ $= \cos\dfrac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3};\quad k = 0;1;2.$ $Z_0 = \cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9};\ Z_1 = \cos\dfrac{7\pi}{9} + i\sin\dfrac{7\pi}{9};$ $Z_2 = \cos\dfrac{13\pi}{9} + i\sin\dfrac{13\pi}{9}.$
Ответ:	$\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9};\ \cos\dfrac{7\pi}{9} + i\sin\dfrac{7\pi}{9};\ \cos\dfrac{13\pi}{9} + i\sin\dfrac{13\pi}{9}.$
3. Решить уравнение: $x^3 + 1000 = 0$.	
Решение.	
Левую часть разложим на множители как сумму кубов:	$(x+10)(x^2 - 10x + 100) = 0;$ $\left[\begin{array}{l} x + 10 = 0; \\ x^2 - 10x + 100 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -10; \\ x = \dfrac{10 \pm \sqrt{-300}}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -10; \\ x = 5 \pm 5\sqrt{3}i. \end{array}\right.$
Ответ:	$-10;\ 5 \pm \sqrt{3}i$.

4. Какое множество точек комплексной плоскости задают условия: а) $\lvert Z+i\rvert = 1$; б) $1 \le \lvert Z+2\rvert \le 2$; в) $\lvert Z-1-i\rvert = \lvert Z+1+i\rvert$?
Решение.

а) условию $|Z+i| = 1$ удовлетворяют те и только те точки плоскости, которые равноудалены от точки $Z_1 = -i$ на расстояние, равное 1. Такие точки лежат на окружности с центром в точке $Z_1 = -i$ $R = 1$ (рис. 1);

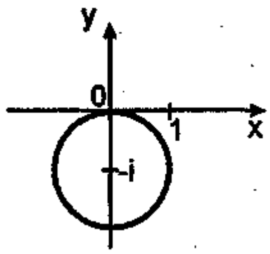


Рис. 1.

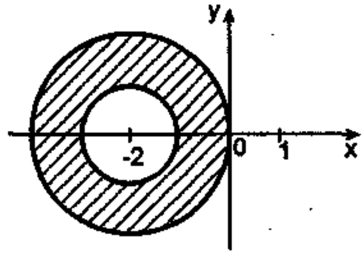


Рис. 2.

б) кольцо между концентрическими окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке $Z_1 = -2$, включая эти окружности (рис. 2);

Геометрическое решение.

в) $|Z-(1+i)| = |Z-(-1-i)|$ — это условие задают те и только те точки плоскости, которые равноудалены от точек $Z_1 = 1+i$ и $Z_2 = -1-i$. Множество точек плоскости, равноудаленных от двух данных точек, — это прямая, перпендикулярная отрезку, который соединяет данные точки и проходит через его середину.

Аналитическое решение.

Пусть $Z = x+yi$, тогда $|x+yi-1-i| = |x+yi+1+i|$;

$|(x-1)+(y-1)i| = |(x+1)+(y+1)i|$, приравнивая модули, получаем:

$(x-1)^2+(y-1)^2 = (x+1)^2+(y+1)^2$;

$x^2 = 2x+1+y^2-2y+1 = x^2+2x+1+y^2+2y+1; \quad -4x = 4y; \quad y = x$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить суммы следующих чисел.

а) $i+(-5i)$; б) $(2+3i)+(1+4i)$; в) $(2+5i)+(-3+i)$.

2. Выполнить умножение.

а) $2i\cdot 3i$; б) $(2-3i)\cdot(2+3i)$; в) $(\sqrt{3}+5i)\cdot(\sqrt{3}-5i)$.

3. Разложить на множители.

а) a^2+4b^2; б) $a+b$; в) $4+3$.

3. Выполнить деление комплексных чисел в алгебраической форме.

а) $\frac{3}{5i}$; б) $\frac{2+i}{i}$; в) $\frac{2i}{1-i}$; г) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; д) $\frac{\sqrt{a}}{a+2i\sqrt{a}}$; е) $\frac{42+21}{3+5i}$.

5. Возвести в степень.

а) $\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; б) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; в) $(1+i)^4+(1-i)^4$.

6. Написать два мнимых числа, которые имеют такие свойства, что:

а) их сумма; б) их произведение; в) их сумма и произведение — действительные числа.

7. Представить в алгебраической форме комплексные числа:

а) $(1+2i)(2-i)+(1-2i)(2+i)$; б) $\frac{5}{1+2i}+\frac{5}{2-i}$;

в) $\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}$; г) $\frac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$.

8. Найти действительные числа x и y из уравнения.

а) $(x+y)+(x-y)i = 2+4i$; б) $(y+2x)+(2y+4x)i = 0$;

в) $\frac{x-1}{3+i}+\frac{y-1}{3-i} = i$; г) $(x+1,5y)+(2x+3y)i = 13i$.

9. Выполнить действия.

а) $\frac{7-2i}{2+7i}$; б) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots i^{100}$; в) $\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^8}+\frac{1}{i^{10}}+\frac{1}{i^{12}}$; г) $\left(\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^4+\left(\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^2$;

д) $(3+2i)^3$; е) $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$; ж) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

10. Решить уравнение.

а) $x^2-4x+5 = 0$; б) $9x^2-18x+13 = 0$; в) $(3x-8)^2+5(3x-8)-150 = 0$;

г) $8x^3+1 = 0$; д) $x^2+36 = 0$; е) $x^4+16 = 0$.

11. Доказать, что корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом являются взаимно сопряженными.

12. Составить квадратное уравнение по его корням.

а) $x_1 = 3-\frac{1}{2}i$; $x_2 = 3+\frac{1}{2}i$; б) $x_1 = 3i$; $x_2 = -3i$;

в) один из корней равен $(5+i)(i-3)$; г) один из корней равен $\frac{5+i}{i-3}$.

13. Решить уравнение.

а) $x^4 = 4$; б) $x^4 = -7$; в) $5x^4+x^2-4 = 0$; г) найти сумму всех корней уравнения $x^4 = 4$;

д) найти произведение всех корней уравнения $x^4 = -7$.

14. Вычислить квадратные корни.

а) $\sqrt{-7-24i}$; б) $\sqrt{24+70i}$; в) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{2+i\sqrt{2}}$; д) $\sqrt{-25}$; е) $\sqrt{-7}$.

15. Выразить в тригонометрической форме.

а) i; б) $-i$; в) -3; г) 7; д) $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$; е) $-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; ж) $4+3i$; з) $1-i\sqrt{3}$; и) $-\sqrt{3}+i$;

к) $5+12i$; л) $2(\cos 20°-i\sin 20°)$.

16. Записать в алгебраической форме.

а) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; б) $6(\cos 0°+i\sin 0°)$; в) $8\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

17. Выполнить действия над числами, данными в тригонометрической форме.

а) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; г) $6(\cos 45°+i\sin 45°):2(\cos 15°+i\sin 15°)$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 150°+i\sin 150°)\cdot\sqrt{3}(\cos 120°+i\sin 120°)$; д) $(\cos 30°+i\sin 30°)^9$;

в) $(\cos 75°+i\sin 75°):(\cos 30°+i\sin 30°)$; е) $\left(3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^6$.

18. Вычислить.

а) $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{90}$; б) $\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{90}$; в) $\sqrt[4]{\cos 120°+i\sin 120°}$; г) $\sqrt[5]{\cos 225°+i\sin 225°}$.

19. Найти все значения корня.

а) $\sqrt[3]{-1}$; б) $\sqrt[4]{1}$; в) $\sqrt[4]{-16}$; г) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

20. Какое множество точек плоскости задается условиями?

а) $|Z| \le 1$; б) $|Z| = 2$; в) $|Z-1| = 2$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-5-1

Тема. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

<table>
<tr><th>В-I</th><th colspan="2">7 баллов</th><th>В-II</th><th>В-III</th><th colspan="2">9 баллов</th><th>В-IV</th></tr>
<tr><td colspan="8">1. Выполнить действия.</td></tr>
<tr><td colspan="2">а) $(5-4i)+(3+7i)$;
б) $(4+3i)-(2+i)$;
в) $(3+5i)\cdot(5+3i)$;
г) $\frac{6}{1-2i}$;
д) $(5+3i)^2$;
е) i^{457};
ж) $\sqrt{-0{,}25}$.</td><td colspan="2">а) $(2+4i)+(-5-i)$;
б) $(-3+4i)-(2-i)$;
в) $(2+3i)\cdot(-4+i)$;
г) $\frac{4}{1+2i}$;
д) $(2-3i)^2$;
е) i^{142};
ж) $\sqrt{-0{,}36}$.</td><td colspan="2">а) $\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}$;
б) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-i)$;
в) $\frac{7-i}{3+i}$;
г) $(i(2-i))^2$;
д) $(-i)^{29}$;
е) $\sqrt{7-24i}$.</td><td colspan="2">а) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$;
б) $(5+i\sqrt{3})(3+i\sqrt{5})$;
в) $\frac{1+i}{1-i}$;
г) $(2i(3-4i))^2$;
д) $-i^{19}$;
е) $\sqrt{5-12i}$.</td></tr>
<tr><td colspan="8">2. Разложить на множители.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$5a^2+b$.</td><td colspan="2">$a+2b^2$.</td><td colspan="2">$4m^2+25n^2$.</td><td colspan="2">$16a^2+1$.</td></tr>
<tr><td colspan="8">3. Решить уравнение.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$4x^2+4x+5=0$.</td><td colspan="2">$x^2-14x+74=0$.</td><td colspan="2">$x^3+1=0$.</td><td colspan="2">$x^3-8=0$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">В-V</th><th colspan="4">12 баллов</th><th colspan="2">В-VI</th></tr>
<tr><td colspan="8">1. Выполнить действия.</td></tr>
<tr><td colspan="4">а) $\frac{2-5i}{4+i}-\frac{6-7i}{4-i}$;
б) $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$;
в) $\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{6}}{-1+i\sqrt{3}}$;
г) $(3-i\sqrt{3})^3$;
д) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$;
е) $\sqrt{-5-12i}$.</td><td colspan="4">а) $\frac{2+i}{3-5i}+\frac{i}{1-i}$;
б) $(k+i\sqrt{n})\cdot(k-i\sqrt{n})$;
в) $\frac{-3\sqrt{2}+i}{1+3i\sqrt{2}}$;
г) $(2-i\sqrt{3})^3$;
д) $i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}+i^{53}$;
е) $\sqrt{-3+4i}$.</td></tr>
<tr><td colspan="8">2. Разложить на множители.</td></tr>
<tr><td colspan="4">$3a+\frac{b}{9}$.</td><td colspan="4">$2a+\frac{b}{4}$.</td></tr>
<tr><td colspan="8">3. Решить уравнение.</td></tr>
<tr><td colspan="4">$27x^3+1=0$.</td><td colspan="4">$27x^3-125=0$.</td></tr>
</table>

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-5-2

Тема. Тригонометрическая форма комплексного числа

В-I	7 баллов	В-II
1. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме.		
а) $3i$; б) -4.		а) 25; б) $-2i$.
2. Представить в алгебраической форме комплексные числа, записанные в тригонометрической форме.		
$2\left(\cos\frac{\pi}{\ } + i\sin\frac{\pi}{\ }\right)$.		$2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.
3. Выполнить действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.		
а) $2(\cos 60° + i\sin 60°) \times 3(\cos 45° + i\sin 45°)$; б) $\frac{4(\cos 75° + i\sin 75°)}{0,4(\cos 30° + i\sin 30°)}$; в) $(3(\cos 45° + i\sin 45°))^6$; г) $\sqrt{\cos 120° + i\sin 120°}$.		а) $\sqrt{2}(\cos 30° + i\sin 30°) \times 2\sqrt{2}(\cos 60° + i\sin 60°)$; б) $\frac{3(\cos 45° + i\sin 45°)}{1,5(\cos 135° + i\sin 135°)}$; в) $(2(\cos 15° + i\sin 15°))^4$; г) $\sqrt{4(\cos 300° + i\sin 300°)}$.

В-III	9 баллов	В-IV
1. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме.		
$2 + 2\sqrt{3}i$.		$\sqrt{3} + i$.
2. Представить в алгебраической форме комплексные числа, записанные в тригонометрической форме.		
$\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.		$\sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.
3. Выполнить действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.		
а) $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\frac{4(\cos 240° + i\sin 240°)}{2(\cos 60° + i\sin 60°)}$; в) $(\cos 30° + i\sin 30°)^8$; г) $\sqrt[3]{\cos 120° + i\sin 120°}$.		а) $\sqrt{3}(\cos 120° + i\sin 120°) \times \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 150° + i\sin 150°)$; б) $\frac{\cos 130° + i\sin 130°}{\cos 40° + i\sin 40°}$; в) $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}$; г) $\sqrt[4]{16(\cos 240° + i\sin 240°)}$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме.		
$-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.		$-1 + \sqrt{3}i$.
2. Представить в алгебраической форме комплексные числа, записанные в тригонометрической форме.		
$2(\cos 0 + i\sin 0)$.		$7(\cos\pi + i\sin\pi)$.
3. Выполнить действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.		
а) $4\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) \times 6\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$; б) $\frac{\cos 130° - i\sin 130°}{\cos 40° + i\sin 40°}$; в) $\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8$; г) $\sqrt[5]{\cos 250° + i\sin 250°}$.		а) $7\left(\cos\frac{8\pi}{15} + i\sin\frac{8\pi}{15}\right) \times 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; б) $\frac{-\cos 100° + i\sin 100°}{\cos 40° - i\sin 40°}$; в) $(2(\cos 60° + i\sin 60°))^6$; г) $\sqrt[6]{\cos 60° + i\sin 60°}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-5-1

В-I	9 баллов	В-II
1. Найти действительные числа x и y из уравнений.		
$(x-y)+(3x+y)i = 3-3i$.		$(x-5y)+(2x-y)i = 6+3i$.
2. Найти модуль и аргумент комплексного числа.		
$(2-3i)+(4+5i)$.		$(2-3i)-(4+5i)$.
3. Составить квадратное уравнение по его корням.		
$x_1 = 2-i$, $x_2 = 2+i$.		$x_1 = 4+2i$, $x_2 = 4-2i$.
4. Упростить.		
$(1+i)^2+(1-i)^2$.		$(1+i)^3+(1-i)^3$.
5. Решить уравнение.		
$x^4-16 = 0$.		$x^4-81 = 0$.
6. Дано комплексное число $Z = x+yi$. Определить множество точек плоскости, если:		
$\|Z\| < 1$.		$\|Z\| > 1$.

В-III	12 баллов	В-IV
1. Найти действительные числа x и y из уравнений.		
$(1-i)x+(1+i)y = 1-3i$.		$y^2+iy^2+6+i = 2x+ix$.
2. Найти модуль и аргумент комплексного числа.		
$(2-3i)\cdot(4+5i)$.		$\frac{2-3i}{4+5i}$.
3. Составить квадратное уравнение по его корням.		
$x_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.		$x_1 = \frac{-1+4i\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{-1-4i\sqrt{3}}{3}$.
4. Упростить.		
$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$.		$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^5+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^5$.
5. Решить уравнение.		
$x^6-9x^3+8 = 0$.		$y^6-2y^3+1 = 0$.
6. Дано комплексное число $Z = x+iy$. Определить множество точек плоскости, если:		
$1 < \|Z\| < 2$.		$3 < \|Z\| < 4$.

СТРАНИЧКА АБИТУРИЕНТА

1. Записать число в тригонометрической форме.   а) $\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$; б) $-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$.
Решение.
а) $\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}$;   б) $-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$.
2. Решить уравнение $\lvert Z\rvert + Z = 13 - 6i$.
Решение.
Пусть $Z = x + yi$, тогда $\lvert Z\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$; $\sqrt{x^2+y^2} + x + yi = 13 - 6i \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + x = 13; \\ y = -6; \end{cases} \Rightarrow \quad x = 5\frac{3}{26}$.
Ответ: $Z = 5\frac{3}{26} - 6i$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ АБИТУРИЕНТА

1. Решить уравнение $\lvert Z\rvert - Z = 1 + 2i$.
2. Найти множество точек координатной плоскости, которые изображают комплексные числа, удовлетворяющие условию $\lvert Z - i\rvert = \lvert Z + 2\rvert$.
3. Найти значения Z, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{Z-12}{Z-8i}\right| = \dfrac{5}{3}; \\ \left|\dfrac{Z-4}{Z-8}\right| = 1. \end{cases}$$

4. Вычислить $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60} + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{30}$.
5. При каких действительных значениях a корни квадратного уравнения $(a+5)x^2 + 2ax + (a-1) = 0$ будут комплексными?
6. При каких значениях k корни квадратного уравнения $x^2 + 2(3+i)x + k = 0$ будут равными?
7. Решить квадратное уравнение.

а) $Z^2 - (2+i)Z + 2i = 0$; б) $Z^2 - (5+2i)Z + 5 + 5i = 0$.

§6. Элементы комбинаторики

Множество

Множество — одно из основных понятий математики, которое не подлежит формальному определению.

В математике понятие **множество** используется для описания совокупности предметов или объектов. При этом предполагается, что предметы (объекты) данной совокупности можно отличить друг от друга и от предметов, которые не входят в эту совокупность. Например, можно говорить о множестве всех книг данной библиотеки, множестве всех вершин данного многоугольника, множестве всех натуральных чисел, множестве всех точек данной прямой. Книги данной библиотеки, вершины данного многоугольника, натуральные числа, точки данной прямой являются элементами соответствующих множеств. Множества обычно обозначаются большими буквами $A, B, X\ldots$. Тот факт, что объект a является элементом множества A, записывается так: $a \in A$ и читается «a принадлежит множеству A», «a входит в множество A». Запись $a \notin A$ означает, что a не является элементом множества A. Множество натуральных чисел, расположенных между числами 21 и 22, не содержит ни единого числа. Такое множество называется пустым множеством. Пустое множество обозначается знаком $\varnothing$. Множества A и B называются равными, если они складываются из одних и тех же элементов. В этом случае пишут $A = B$. В школьном курсе математики приняты стандартные обозначения числовых множеств: N — множество натуральных чисел, Z — множество целых чисел, Q — множество рациональных чисел, R — множество действительных чисел.	Задача 1. Записать с помощью фигурных скобок множество натуральных чисел, расположенных на луче между числами 10 и 15. Какие из чисел $0;10;11;12;15$ и 50 принадлежат этому множеству? Пусть A — множество натуральных чисел, расположенных на луче между числами 10 и 15. $A = \{11;12;13;14\}$; $0 \notin A$, $10 \notin A$, $11 \in A$, $12 \in A$, $15 \notin A$, $50 \notin A$. Задача 2. Сравните множество решений уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ и множество простых чисел, меньших пяти. $x^2 - 5x + 6 = 0$. $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ (по теореме Виета). Множество простых чисел $x < 5$ — это $\{2;3\}$. Ответ: эти два множества равны. Задача 3. Записать множество двузначных чисел, расположенных на луче левее девяти. Ответ: $\varnothing$.

Подмножество

Если любой элемент множества A принадлежит также множеству B, то множество A называется подмножеством множества B. Это записывают так: $A \subset B$ или $\supset A$.

В этом случае говорят, что множество A содержится в множестве B или множество B содержит множество A. Если в множестве A найдется хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству B, то A не является подмножеством множества B: $A \not\subset B$.	$N \subset Z$; $(a;b) \subset [a;b]$ $[a;b] \not\subset (a;b)$, потому что $a \in [a;b]$.

Из определения подмножества следует, что любое множество является подмножеством самого себя, то есть справедливо $\subset A$.

Пересечение множеств

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B, называется **пересечением множеств** A и B и обозначается $\cap B$.	$[a;b] \cap (a;b]$, так как $a \in [a;b]$.

Объединение множеств	
Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих или множеству A, или множеству B, называется **объединением множеств** A и B и обозначается $A \cup B$.	а) $x = \{0;1;3;5\}$; $y = \{1;2;3;4\}$ $x \cap y = \{1;3\}$. б) $A \cap \varnothing = \varnothing$; $\{0;1;3;5\} \cup \{1;2;3;4\} = \{0;1;2;3;4;5\}$.
Для конечного множества A через (A) обозначим число его элементов. Число элементов пустого множества, очевидно, равно нулю. Для любых конечных множеств A и B справедливо равенство: $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$ (1)	
Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти баллов получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов (то есть не получили «2»). Сколько человек получили оценки «3» и «4»?	Пусть A — множество абитуриентов, выдержавших экзамен, B — множество абитуриентов, получивших оценку ниже пяти баллов, по условию $m(A) = 210$, $m(B) = 180$, $m(A \cup B) = 250$. Абитуриенты, получившие оценки «3» и «4», образуют множество $\cap B$. По формуле (1) находим $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 140$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть A — множество делителей числа 15, B — множество простых чисел, меньших 10, C — множество четных чисел, меньших 9. Перечислить элементы этих множеств и найти: $A \cup B, A \cup C; B \cap C, (A \cup C) \cap B, A \cap B \cap C$.

2. $A = [-1;1], B = (-\infty;0), C = [0;2)$. Найти множество, изобразить его на координатной прямой, если: $A \cup C, A \cap B, A \cup B \cup C, (A \cup B) \cap C, B \cap C$.

3. Найти область определения функции.

а) $f(x) = \sqrt{3-5x-3x}$; б) $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}$.

4. Изобразить на координатной плоскости множество, координаты $(x;y)$ точек которого удовлетворяют условию.

а) $y - x^2 \geq 0$; б) $|y| - |x| \geq 0$.

5. На примере множеств $A = \{a, b, c, d\}, B = \{b, c, d, q\}, C = \{c, p, z, t\}$ проверить справедливость равенства $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

6. $A = \{$простые числа $< 20\}, B = \{$чётные числа $< 20\}$. Найти пересечение заданных множеств.

7. Когда $A \cap B = A$?

8. Какое из двух данных множеств является подмножеством другого:

а) A и $A \cap B$; б) A и $A \cup B$; в) $A \cap B, A \cup B$?

9. Среди абитуриентов, выдержавших вступительные экзамены в вуз, оценку 10 баллов получили: по математике — 48 абитуриентов, по физике — 37, по украинскому языку — 42, по математике или физике — 75, по математике или украинскому языку — 76, по физике или украинскому языку — 66, по всем трём предметам — 4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну оценку 10 баллов, сколько среди них тех, кто получил только 10 баллов?

10. Из 35 учеников одного класса по итогам учебного года оценку 10 баллов по математике имели 14 учеников, по физике — 15, по химии — 18, по математике и физике — 7, по математике и химии — 9, по физике и химии — 6, по всем трем предметам — 4. Определить, сколько учеников имеют оценку 10 баллов не меньше чем по двум этим предметам.

Размещения

<table>
<tr>
<td>Пусть имеется множество, содержащее n-элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k-элементов, называется размещением из n-элементов по k-элементов.</td>
<td>$A_4^3 = 4(4-1)(4-2) = 4\cdot 3\cdot 2 = 24;$
$A_{10}^3 = 10(10-1)(10-2) =$
$= 10\cdot 9\cdot 8 = 720;$
$A_6^2 = 6\cdot 5 = 30.$</td>
</tr>
<tr>
<td>В комбинаторных задачах необходимо уметь подсчитать число всех размещений из n-элементов по k-элементов. Для обозначения этого числа применяется специальный символ ^k_n (читается: «число размещений из n по k» или «A из n по k». $A_k^0 = 1$. A — первая буква французского слова «arrangement», что означает «размещение, приведение в порядок».</td>
<td>Используя знак факториал, записать:
$1! = 1$
$2! = 1\cdot 2 = 2$
$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$
$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$
$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120.$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">В общем случае на вопрос о числе размещений из n-элементов по k-элементов дает ответ такая формула:
(1) $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1), k>0$,
то есть число размещений из n-элементов по k-элементов равно произведению k последовательных натуральных чисел от n до $n-k+1$ включительно.
Формулу (1) удобно записывать в другом виде. Будем для краткости произведение $n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$, то есть произведение всех натуральных чисел от n до единицы, обозначать символом $n!$ (читается «эн факториал»).
Умножим и разделим произведение, стоящее в правой части формулы (1) на $(n-k)!$. Тогда получим:
$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}$ или (2)
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $A_0^0 = 1, A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1$, если условиться, что $0! = 1$.</td>
<td>Вычислить:
$\frac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4} = \frac{\frac{20!}{14!} + \frac{20!}{15!}}{\frac{20!}{16!}} = \frac{16!}{14!} + \frac{16!}{15!} =$
$16\cdot 15 + 16 = 16\cdot 16 = 256.$</td>
</tr>
<tr>
<td>В седьмом классе изучается 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть 5 разных уроков?
Решение.
$A_{14}^5 = 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10 = 240240.$</td>
</tr>
</table>

Перестановки

Размещения из n-элементов по n-элементов называются **перестановками из n-элементов.** Перестановки являются частным случаем размещения. Так как каждая перестановка содержит все n-элементы множества, то разные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов. Число перестановок из n-элементов обозначают через P_n. P — первая буква французского слова «permutation» — «перестановка». В общем случае число перестановок из n-элементов $P_n = A_n^n$, следовательно, его можно найти по формуле (1) или по формуле (2), предположив в каждой из них $= n$. Действительно, формула (2) дает: $P_n = A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$ Из формулы (1) находим: $P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1) = n!$ Итак, число перестановок из n-элементов равно $n!$.	Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются? Решение: $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$.
	Найти n, если $\dfrac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240A_{n+3}^{k+3}$, $k \le n$. Применяя формулу для числа перестановок и формулу (2) для числа размещений, перепишем данное уравнение следующим образом: $\dfrac{(n+5)!}{(n-k)!} = 240\dfrac{(n+3)!}{(n+3-k-3)!}$. Полученное уравнение равносильно квадратному уравнению $(n+5)(n+4) = 240$, где $n = 11$; $n = -20$. При $n = -20$ левая и правая части уравнения не имеют смысла, тогда $n = 11$. Ответ: $n = 11$.
Таким образом, в множестве, содержащем n-элементов, установить определенный порядок последовательности элементов или, как говорят, упорядочить такое множество можно $n!$ способами.	Например, список учеников класса, в котором 20 человек и нет однофамильцев, можно составить $20! = 2432902008176640000$ способами.

Сочетания

Пусть имеется множество, состоящее из n-элементов. Каждое его подмножество, содержащее k-элементов, называется **сочетанием из n-элементов по k-элементов**. Число всех сочетаний из n-элементов по k-элементов обозначается символом ${}_n^k$ (читается: «число сочетаний из n по k» или «цэ из n по k ». C — первая буква французского слова «combinasion» — «сочетание». $C_4^3 = 4$; $C_5^2 = 10$.

В общем случае число сочетаний из n-элементов определяется следующей формулой:

$C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ (3).

Формулу (3) можно записать в другом, более удобном для вычислений виде. Сократив числитель и знаменатель дроби на $(n-k)!$, получим $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ (4), т.е. число сочетаний из n-элементов по k-элементов равно произведению всех натуральных чисел от n до $n-k+1$ включительно, деленному на $k!$.

Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 членов, можно образовать из 14 преподавателей?

Решение. Очевидно столько, сколько существует семиэлементных подмножеств у четырнадцатиэлементного подмножества. По формуле (4) находим:

$$C_{14}^7 = \frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{7!} = \frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 3432.$$

1) $A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$;

2) $P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\dots3\cdot2\cdot1 = 1\cdot2\cdot3\dots(m-1)m = m!$ число всевозможных перестановок из m-элементов равно произведению натуральных чисел от 1 до m;

3) $A_m^n = (C_mP_n)^n$. $C_m^n = \dfrac{A_m^n}{P_n} = \dfrac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\dots n}$ или

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n\cdot P_{m-n}};C_m^n = C_m^{m-n};C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1}+C_n^k;$$

$$C_{100}^{97} = C_{100}^3 = \frac{100\cdot99\cdot98}{1\cdot2\cdot3} = 161700.$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

11. В классе 10 учебных предметов и 5 разных уроков в день. Сколькими способами могут быть распределены уроки в день?

12. Сколько можно образовать разных чисел, из которых каждое выражалось бы тремя разными значащими цифрами?

13. Сколько девятизначных чисел можно написать девятью разными значащими цифрами?

14. Из 10 кандидатов на одну и ту же должность должны быть выбраны трое людей. Сколько может быть разных случаев выборов?

15. В чемпионате страны по футболу (высшая лига) принимают участие 18 команд, причем каждые две команды встречаются между собой 2 раза. Сколько матчей играется в течение сезона?

16. Сколькими способами можно раздать 28 костей домино четырём игрокам, чтобы каждый получил по 7 костей?

17. Сколько различных перестановок можно произвести из букв слова «задача»?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-6-1

В-I	7 баллов	В-II
1. Найти и изобразить множество на координатной прямой, если: (сложность 1)		
$A = [0;3], B = (1;5), C = (-2;0]$. $A \cup B, A \cap B, A \cap C, B \cap C$, $A \cap B \cap C, (A \cup B) \cap C$.		$A = (-8;1], B = [1;+\infty), C = (0;1)$. $A \cup B, A \cap B, A \cap C$, $B \cap C, A \cap B \cap C, (A \cup B) \cap C$.
2. Вычислить.		
$A_5^2;\ P_3,\ C_5^4$.		$A_7^5;\ P_7,\ C_8^4$.
3. Сколько разных перестановок можно образовать из букв слова?		
«Носорог».		«Зебра».

В-III	9 баллов	В-IV
1. Записать множества A, B, C перечислением их элементов и найти $A \cap B, B \cap C, A \cup B \cap C, A \cap B \cap C$, если: (сложность 2)		
A — множество делителей числа 12; B — множество корней уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$; C — множество нечетных чисел таких, что $3 \le x \le 12$.		A — множество четных чисел x, $3 < x < 10$; B — множество делителей числа 21; C — множество простых чисел, меньших 12.
2. Вычислить.		
$\frac{A_7^5 + A_7^4}{A_7^3};\ C_{18}^{17}$.		$\frac{P_5 - A_5^2}{5};\ C_{20}^{18}$.
3. Решить задачу.		
Сколько разных четырехзначных чисел можно написать девятью значащими цифрами, из которых ни одна цифра не повторяется?		Сколько разных делегаций можно выбрать из группы в 12 человек, если в делегацию входят три человека?

В-V	12 баллов	В-VI
1. Решить задачу.		
Найти пересечение числовых множеств A и B, если каждый элемент множества A имеет вид $4n + 2, n \in N$, а каждый элемент множества B имеет вид $3n, n \in N$.		В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того, ни другого. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?
2. Вычислить.		
$\frac{6!}{A_{10}^7}(C_5^7 + C_7^3)$.		$\frac{P_{k+1}}{(k-n)!A_{k-1}^{n-1}}$.
3. Решить задачу.		
Сколько разных двузначных чисел можно составить из цифр $1, 2, 3, 4$ при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?		Сколько разных двузначных чисел можно составить из цифр $1, 2, 3, 4$?

УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

Комбинаторные задачи

Задача 1. В классе 30 учеников. Сколькими способами могут быть выбраны староста и его заместитель, если каждый учащийся может быть избран на одну из этих должностей?

Решение. Так как по условию задачи каждый учащийся может быть выбран старостой, то, очевидно, существует 30 способов выбора старосты. Заместителем может быть каждый из оставшихся 29 человек. Любой из 30 способов выбора старосты может осуществляться вместе с любым из 29 способов выбора заместителя старосты. Поэтому существует $30 \cdot 29 = 870$ способов выбора старосты и его заместителя. Значит, $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$.

Задача 2. Для дежурства в классе в течение недели (кроме воскресенья) выделяли 6 учащихся. Сколькими способами можно установить очередность дежурства, если каждый учащийся дежурит один раз?

Решение. В понедельник может дежурить любой из выделенных шести человек, во вторник может дежурить любой из 5 человек. Следовательно, расписание дежурств на первые два дня недели можно составить $6 \cdot 5 = 30$ способами. К среде остаются 4 человека, которые еще не дежурили, и поэтому на среду дежурного можно выбрать 4 способами. Каждый из этих способов может комбинироваться с любым из 30 способов выбора дежурных на понедельник и вторник. Поэтому существует $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способов и т.д.

Ясно, что число способов, которыми можно установить дежурство, равно

$P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Задача 3.

Для проведения экзамена создается комиссия из двух преподавателей. Сколько разных комиссий можно составить из пяти преподавателей?

Решение. $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$.

Ответ: 10 комиссий.

Задача 4.

На плоскости дано n точек, три из которых не лежат на одной прямой за исключением m точек, которые лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Решение. $C_n^3 - C_m^3$ — треугольников.

Задача 5.

Нужно распределить работу в шести классах между тремя учителями, чтобы каждый из них работал в двух классах. Сколькими способами можно это сделать?

Решение.

$C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6 \cdot 5 \cdot 3 = 90.$

Ответ: 90 способами.

Решая сложные комбинаторные задачи, часто приходится пользоваться следующими двумя правилами.

1. Если некоторый выбор можно выполнить m разными способами, а для каждого из этих способов некоторый выбор можно выполнить n разными способами, то число способов для выполнения последовательности этих выборов равно произведению mn.

2. Если некоторый выбор можно выполнить m разными способами, а другой выбор n разными способами (отличными от предыдущих), то общее число способов, которыми можно выполнить любой из этих выборов, равен сумме $m + n$.

Бином Ньютона

Хорошо известные формулы $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ можно записать так: $(a+b)^2 = c_2^0a^2+c_2^1ab+c_2^2b^2$, $(a+b)^3 = c_3^0a^3+c_3^1a^2b+c_3^2b^2+c_3^3b^3$, поэтому $(a+b)^n = c_n^0a^n+c_n^1a^{n-1}b+\ldots+c_n^ka^{n-k}b^k+$ $+\ldots+c_n^nb^n$ — это равенство известно как формула бинома Ньютона. Можно его записать так: $(x+a)^m = x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2}+$ $+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{m-3}+\ldots$ $+\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\times a^nx^{m-n}+\ldots+a^m$.	1)$(x+a)^7 = x^7+7ax^6+21a^6x^5+35a^6x^4+$ $+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7$. 2) Найти приближенное значение степени $0,97^5$. Решение. $0,97^5 = (1-0,03)^5 = (1+(-0,03)^5)=$ $=1-5\cdot 0,03 = 10\cdot 0,03^2-10\cdot 0,03^3+$ $+5\cdot 0,03^4-0,03^5$. Найдем сумму первых трех членов, получим $0,659$ с погрешностью $0,001$. 3) Для освещения зала может быть включена каждая из 10 ламп. Сколько существует разных способов освещения зала? Решение. Очевидно столько, сколько существует подмножеств у десятиэлементного множества, т.е. $2^{10} = 1024$.

Основные правила комбинаторики

1. Правило суммы. Если объект A может быть выбран m способами, а объект B может быть выбран другими n способами, то выбор одного элемента — или A, или B — может быть осуществлен $m+n$ способами.	Задача 1. В одной вазе лежат 5 яблок, а в другой — 8 мандаринов. Сколькими способами можно выбрать яблоко или мандарин? Решение. Одно яблоко можно выбрать пятью способами, а один мандарин — другими восьмью способами. Тогда яблоко или мандарин можно выбрать $N = 5+8 = 13$ способами.
2. Правило произведения. Если объект A может быть выбран m способами и после каждого такого выбора объект B может быть выбран n способами, то выбор пары объектов A и B в указанном порядке может быть осуществлен n способами. Эти правила могут быть распространены на случай выбора из трех и более множеств.	Задача 2. В магазине имеется три вида ручек и два вида карандашей. Сколько разных комплектов, содержащих ручку и карандаш, можно приобрести в этом магазине? Решение. $N = 3\cdot 2 = 6$ разных комплектов.

Задача на совместное применение суммы и произведения.

Задача 3. Сколько чисел, имеющих не больше трех знаков, можно составить из цифр $1, 2, 3, 4, 5$ так, чтобы цифры в числах не повторялись?

Решение. Нам надо узнать, сколько можно составить однозначных, двузначных или трехзначных чисел. По правилу суммы их будет: $N = N_1+N_2+N_3$.

$N_1 = 5; N_2 = 5\cdot 4 = 20; N_3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$.

Следовательно, $N = 5+20+60 = 85$. Ответ: 85.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

18. В вазе 10 красных и 4 белых розы. Сколькими способами можно выбрать 3 цветка из вазы?

19. На собрании присутствовали 7 женщин и 8 мужчин. Сколькими способами можно избрать президиум из присутствующих?

20. Сколькими способами 12 одинаковых монет можно разложить по пяти разным карманам?

21. Сколькими способами можно упаковать 9 разных книг в 5 бандеролей, если в 4 бандеролях должно быть по 2 книги?

22. Сколько двузначных чисел можно записать в десятичной системе исчисления?

23. В классе 12 учебных предметов и 6 разных уроков в день. Сколькими способами могут быть распределены уроки на день?

24. Найти значение выражения:

а) $C_{10}^{3} + C_{9}^{4}$; б) $C_{11}^{2} + C_{9}^{3}$; в) $C_{15}^{11} - C_{16}^{14}$; г) $\dfrac{C_{10}^{3} + C_{16}^{4} + C_{17}^{5}}{C_{18}^{6}}$.

25. Найти значение выражения:

а) $\dfrac{A_{12}^{4} - A_{11}^{4}}{A_{10}^{3}}$; б) $\dfrac{A_{13}^{3}}{A_{15}^{3} + A_{14}^{3}}$; в) $\dfrac{A_{12}^{4} \cdot 7!}{A_{11}^{9}}$.

26. Сколько разных четырехзначных чисел можно написать восьмью значащими цифрами, из которых ни одна не повторяется?

27. Решить уравнение:

а) $A_x^2 = 42$; б) $A_x^2 = 56x$; в) $A_x^2 + C_x^1 = 256$; г) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$.

28. Сколько телефонных номеров можно составить из пяти цифр так, чтобы в каждом отдельно взятом номере все цифры были разными?

29. На тренировках занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть составлено тренером разных спортивных пятёрок?

30. Вычислить по формуле бинома Ньютона:

а) $(1+x)^6$; б) $(x+3)^5$; в) $(x-1)^7$; г) $(3a+4b)^6$; д) $(2-x)^8$; е) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8$.

31. Найти третий член разложения: $(x+3)^5$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-6-2

В-I	9 баллов	В-II
1. В классе 30 учеников. Сколькими способами можно выделить двух учеников для дежурства в классе, если:		
один должен быть старшим.		старшего не должно быть.
2. Найти по формуле бинома Ньютона.		
$(2-a)^6$.		$(1+x)^5$.

В-III (12 баллов)
1. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество разных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?
2. Вычислить по формуле бинома Ньютона: $(x-2)^6$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-6-1

В-I (9 баллов)	В-II
1. В одной коробке лежат 5 карандашей, а в другой коробке — 8 ручек. Сколькими способами можно выбрать один карандаш и одну ручку?	1. В одном магазине есть 3 сорта конфет и 2 сорта печенья. Сколько разных покупок, содержащих один сорт конфет и один сорт печенья, можно сделать в этом магазине?
2. Сколько существует способов, чтобы разместить 12 гостей за столом, на котором поставлено 12 приборов?	2. В соревнованиях принимают участие 8 команд. Сколько существует вариантов распределения мест между этими командами?
3. Сколько можно провести разных плоскостей через 8 точек пространства, если никакие четыре из них не лежат в одной плоскости?	3. В турнире принимали участие 12 шахматистов; каждый из них сыграл с каждым из остальных по одной партии. Сколько всего было сыграно партий?

В-III (12 баллов)
1. В одной вазе лежат 8 груш, а в другой — 5 яблок. Сколькими способами можно выбрать грушу и яблоко?
2. Сколько разных перестановок можно составить из букв слова «точка»?
3. Сколькими способами из коробки, содержащей 12 цветных карандашей, можно выбрать 3 карандаша так, чтобы ни один из них не был черным?

§7. Начала теории вероятности

Основные понятия теории вероятности

Раздел математики, который изучает закономерности массовых случайных событий, называется **теорией вероятности**.

Исходным понятием теории вероятности является понятие **события**.

Событие — это явление, о котором можно сказать, что оно происходит или не происходит, в зависимости от природы самого события.

События обозначаются большими буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$ Любое событие происходит вследствие испытания.

Например, подбрасываем монету — испытание, появление герба — событие; достаем лампу из коробки — испытание, она бракованная — событие; вынимаем наугад шарик из ящика — испытание, шарик оказался черного цвета — событие.

Случайным событием называется событие, которое может произойти или не произойти во время данного испытания.

Например, вынимая наугад одну карту из колоды, вы взяли туз; стреляя, стрелок попадает в цель.

Теория вероятности изучает только массовые случайные события.

Достоверным называется событие, которое вследствие данного испытания обязательно произойдет; (обозначается E).

Невозможным называется такое событие, которое вследствие данного испытания не может произойти; (обозначается U).

Например, появление одного из шести очков во время одного броска игрального кубика — достоверное событие, а появление 8 очков — невозможное.

Равновозможные события — это такие события, каждое из которых не имеет никаких преимуществ в появлении чаще другого во время многочисленных испытаний, которые проводятся с одинаковыми условиями.

Попарно несовместимые события — это события, два из которых не могут произойти вместе.

Вероятность случайного события — это отношение числа событий, которые благоприятствуют этому событию, к общему числу всех равновозможных несовместимых событий:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N},$$

где A — событие;

$P(A)$ — вероятность события;

N — общее число равновозможных и несовместимых событий;

$N(A)$ — число событий, которые благоприятствуют событию A.

Это — классическое определение вероятности случайного события.

Классическое определение вероятности имеет место для испытаний с конечным числом равновозможных результатов испытания.

Пусть сделано n выстрелов по мишени, из которых оказалось m попаданий. Отношение $W(A) = \frac{m}{n}$ называется относительной статистической частотой наступления события A.

Следовательно, (A) — статистическая частота попадания.

Таблица 1

Количество выстрелов, n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	00
Количество попаданий, m	8	17	26	33	41	49	56	65	72	81
$W(A) = \frac{m}{n}$	,8	0,85	0,86	0,83	0,82	0,82	0,8	0,81	0,8	0,81

При проведении серии выстрелов (табл.1) статистическая частота будет колебаться около определенного постоянного числа. Это число целесообразно принять за оценку вероятности попадания.

Вероятностью события A называется то неизвестное число P, около которого собираются значения статистических частот наступления события A при возрастании числа испытаний.

Это — статистическое обозначение вероятности случайного события.

Операции над событиями

Под элементарными событиями, связанными с определенным испытанием, понимают все неразложимые результаты этого испытания. Каждое событие, которое может наступить в результате этого испытания, можно рассматривать как некоторое множество элементарных событий.

Пространством элементарных событий называется произвольное множество (конечное или бесконечное).

Все известные отношения и операции над множествами переносятся на события.

Говорят, что событие A является частным случаем события B (или B является результатом A), если множество A является подмножеством B. Обозначают это отношение так же, как для множеств: $A \subset B$ или $B \supset A$. Таким образом, отношение $A \subset B$ означает, что все элементарные события, входящие в A, входят также в B, то есть при наступлении события A наступает также событие B. При этом, если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

Событие $\bar{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит, называется противоположным событию A. Поскольку в каждом испытании происходит одно и только одно из событий — A или $\bar{A}$, то $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, или $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Объединением или **суммой событий** A и B называется событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда или происходит событие A, или происходит событие B, или происходят A и B одновременно. Это обозначается $C = A \cup B$ или $C = A + B$.

Объединением событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из данных событий. Обозначается объединение событий $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, или $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, или $A_1 + A_2 + ... + A_n$.

Пересечением или **произведением** событий A и B называется событие D, которое происходит тогда и только тогда, когда события A и B происходят одновременно, и обозначается $D = A \cap B$ или $D = A \cdot B$.

Совмещением или произведением событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит и событие A_1, и событие A_2, и т.д. , и событие A_n. Обозначается совмещение так: $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ или $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$, или $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n$.

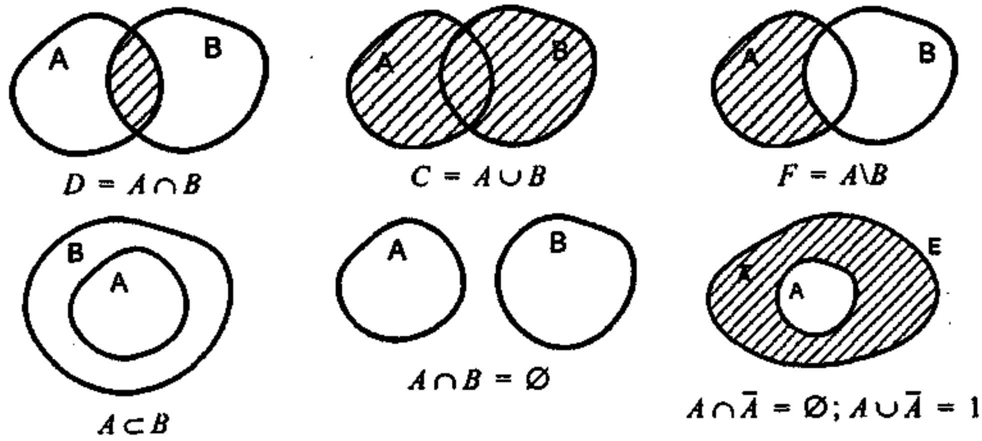
Если события A и B не могут произойти одновременно, то такие события называют **несовместимыми**.

Значит, для несовместимых событий, и только для них, $A \cap B = U$.

Также $A \cap E = A$, $A \cup U = A$, $A \cap U = U$, то есть невозможное событие U играет роль нуля, а достоверное событие E играет роль единицы, то есть, $\equiv \varnothing$, $E \equiv 1$.

Разностью $A \backslash B$ **событий** A и B называется событие F, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A и не происходит событие B, то есть $F = A \backslash B$.

Определение операций объединения, пересечения, разности событий можно проиллюстрировать с помощью колец Эйлера:



$D = A \cap B$ $C = A \cup B$ $F = A \setminus B$

$A \subset B$ $A \cap B = \varnothing$ $A \cap \bar{A} = \varnothing;\ A \cup \bar{A} = 1$

Из статистического определения вероятности события вытекает, что вероятность события всегда есть число положительное или нуль. Следовательно, имеем такие свойства вероятности:

1) $P(E) = 1$;

2) $P(U) = 0$;

3) $0 \le P(A) \le 1$ для любого события.

Вероятность суммы событий

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятности этих событий без вероятности их произведения.

Если A и B — некоторые события, то $\boxed{P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A \cdot B)}$.

Данная теорема называется теоремой сложения вероятностей.

Из этой теоремы вытекает результат для несовместимых событий A и B: если $A \cap B = U$, то $P(A \cdot B) = 0$. Поэтому для несовместимых событий $\boxed{P(A+B) = P(A)+P(B)}$, то есть вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

Если $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — попарно несовместимые события, то
$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m).$$

Эта теорема справедлива для событий, связанных с одним и тем же испытанием.

Условная вероятность и независимость событий

Пусть имеем события A и B, и $P(B) \ne 0$. Условной вероятностью события A при условии, что наступило событие B, называется число $\boxed{P(A/B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)}}$ или $\boxed{P(A \cdot B) = P(A/B) \cdot P(B)}$.

Если $A = B$, то $P(B/B) = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$.

События A и B называются независимыми, если $\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}$.

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Если события A и B независимы, то независимы также события $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Случайные события A, B, C независимы в совокупности, если они попарно независимы и $\boxed{P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}$.

Случайные события A, B, C, D независимы в совокупности, если независимы в совокупности любые три из них и $\boxed{P(A \cdot B \cdot C \cdot D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)}$.

Независимые испытания. Схема Бернулли

Пусть при осуществлении n независимых испытаний событие A наступило m раз. Обозначим вероятность наступления события через $P_n(m)$. Тогда

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}} \text{ — формула Бернулли.}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Здесь C_n^m — количество случаев осуществления события A,

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $p = P(A)$, $q = P(\bar{A}) = 1 - p$.

Случайная величина. Закон её распределения

Случайной величиной называется функция, заданная на множестве результатов данного эксперимента или в пространстве элементарных событий.

Например, количество аварий автотранспорта в течение суток в любом городе зависит от случая.

Совокупность результатов опыта называется **пространством элементарных событий** эксперимента.

Законом распределения случайной величины X называется функция, которая каждому значению x случайной величины X ставит в соответствие вероятность $P(X = x)$.

В общем случае закон распределения случайной величины записывается так, как показано в таблице 2.

Таблица 2

x_k	x_1	x_2	...	x_n
p_k	p_1	p_2	...	p_n

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ — все различные значения случайной величины X, а $p_k = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ — вероятности, с которыми X принимает эти значения.

События $\{X = x_1\}, \dots, \{X = x_n\}$ попарно несовместимы, их сумма является достоверным событием. Поэтому сумма вероятностей этих событий $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Данное равенство можно использовать для проверки закона распределения случайной величины.

Математическое ожидание

Пусть случайная величина имеет закон распределения, обозначенный в таблице 2.

Сумма произведений значений случайной величины на соответствующие вероятности называется математическим ожиданием (или средним значением) случайной величины X и обозначается символом X:

$$\boxed{MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_k x_k p_k}.$$

Свойства
1. Для произвольной случайной величины X и произвольного числа c имеет место равенство: $M(cX) = cMX$.
2. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной: $Mc = c$.
3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин: $M(X+Y) = MX + MY$. Аналогично $M(X-Y) = MX - MY$.
4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$.

Дисперсия случайной величины

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания: $DX = M(X - MX)^2$.

Средним квадратичным отклонением случайной величины называется корень квадратный из её дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{DX}$.

Свойства дисперсии случайной величины
1. $DX = MX^2 - (MX)^2$.
2. Если c — постоянная, то $D(X+c) = DX$; $D(cX) = c^2DX$; $Dc = 0$.
3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X+Y) = DX+DY$.

Выборочной дисперсией называется выражение $S^2 = \sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2\frac{n_i}{n}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — наблюдаемые различные значения случайной величины; $n_1, \ldots, n_m$ — их частоты, $n = n_1+n_2+\ldots+n_m$ — общее количество наблюдений, $\bar{x}$ — выборочное среднее.

Выборочным средним называется величина $\bar{x} = x_1\frac{n_1}{n}+x_2\frac{n_2}{n}+\ldots+x_m\frac{n_m}{n}$

или $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}x_kn_k$.

Выборочная дисперсия является средним всех квадратов отклонений результатов наблюдений от их среднего значения $\bar{x}$.

Величина S, которая равна корню квадратному из выборочной дисперсии, называется выборочным средним квадратичным или **стандартным отклонением.**

Случайные величины называются **независимыми**, если для любых x и y выполняется равенство:

$$\boxed{P((X=x)\cdot(Y=y)) = P(X=x)\cdot P(Y=y)}$$

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются независимыми в совокупности, если события $(X_1=x_1), \ldots, (X_n=x_n)$ независимы в совокупности для любых $x_1, \ldots, x_n$.

Закон больших чисел

Если случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют одно и то же математическое ожидание и одну и ту же дисперсию, то их среднее арифметическое при достаточно большом n с вероятностью, как угодно близкой к единице, как угодно мало отклоняется от a.

Это простейший частный случай теоремы П. Л. Чебышева.

Результат (теорема Бернулли)

Пусть k — количество наступления события A в n независимых испытаниях, p — вероятность наступления этого события в каждом испытании. Тогда для любого $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\to 1, \text{ когда } n\to\infty.$$

УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

Классическое определение вероятности

Использование формул комбинаторики для вычисления вероятностей

1. В корзинке находятся 4 белых и 7 черных шариков. Какова вероятность того, что наугад вынутый шарик окажется белого цвета?
Решение.
Используем формулу $P(A) = \frac{N(A)}{N}$. Пусть A — событие, которое означает, что наугад взятый шарик белого цвета; таких шариков 4, поэтому $N(A) = 4$ — число всех равновозможных событий, которые благоприятствуют событию A; число всех равновозможных элементарных событий $= 11$. Поэтому $P(A) = \frac{4}{11}$.
2. Из полного набора костей домино наугад выбирается одна кость. Какова вероятность появления кости, сумма очков на которой равна шести?
Решение.
Испытание состоит в том, что вынимается одна кость из полного набора домино. Поскольку она выбрана наугад, то все результаты испытания равновозможны, причем они несовместимы. В полном наборе домино 28 костей, следовательно, $N = 28$. Пусть A — событие, которое означает, что сумма очков на выбранной кости равна шести. Событию A благоприятствуют 4 результата испытания, а именно: появление костей, на которых нанесены очки $0-6$, $1-5$, $2-4$, $3-3$. Следовательно, $P(A) = \frac{4}{28} \approx 0,143$.
3. Какова вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет чётное число очков?
Решение.
Пусть A — событие, которое означает, что при бросании кубика выпадет чётное число очков. В этом эксперименте мы имеем 6 равновозможных результатов: события $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Нас интересует вероятность события A. Этому событию благоприятствуют три результата эксперимента: A_2, A_4 и A_6. Следовательно, $N = 6$, $N(A) = 3$, поэтому искомая вероятность $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
4. Подбросили две монеты. Какова вероятность того, что на каждой монете выпадет герб?
Решение.
Возьмем одну монету медную, одну серебряную и обозначим: $Г$ — событие, которое означает, что на обеих монетах выпал герб; Ц — на обеих монетах выпала цифра; A_1 — событие, которое означает, что на серебряной монете выпал герб, на медной монете выпала цифра; A_2 — на медной монете выпал герб, на серебряной монете — цифра. Эти четыре события равновозможны. Следовательно, равновозможность результатов эксперимента — 4, то есть $= 4$. Нас интересует вероятность события $Г$. Ему благоприятствует только один результат, то есть $N(A) = 1$. Значит, искомая вероятность $P(Г) = \frac{1}{4}$.

5. Подбросили два игральных кубика и подсчитали сумму выпавших очков. Что вероятнее получить в сумме: 7 или 8?
Решение.
Пусть A — событие, которое означает, что сумма выпавших очков равна семи. Этому событию благоприятствуют следующие 6 результатов: $1-6$, $2-5$, $3-4$, $4-3$, $5-2$ и $6-1$, следовательно, $N(A) = 6$. Число всех равновозможных событий $N = 36$, поскольку каждое из 6 очков, которые могут выпасть на первом кубике, может быть в паре с любым из 6 очков, которые могут выпасть на втором кубике. Поэтому $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Пусть B — событие, которое означает, что сумма выпавших очков равна восьми. Этому событию благоприятствуют следующие 5 результатов: $2-6$, $3-5$, $4-4$, $5-3$, $6-2$. То есть $N(B) = 5$. Поэтому $P(B) = \frac{5}{36}$. Следовательно, сумма очков 7 является более вероятным событием, чем сумма очков 8.
6. В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шариков. Из них 12 белых и 8 черных. Наугад вынимают два шарика. Какова вероятность того, что оба шарика белые? что они разного цвета?
Решение.
Число всех равновозможных событий $N = C_{20}^2$, то есть из 20 шариков выбираем 2. Пусть B — событие, которое означает, что оба шарика белые. Поскольку белых шариков 12 и среди них нам нужно выбрать 2 шарика, то $N(B) = C_{12}^2$ — число всех равновозможных результатов, которые благоприятствуют наступлению события B. Следовательно, искомая вероятность: $$P(B) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{12!\cancel{2}!18!}{\cancel{2}!10!20!} = \frac{11\cdot 12}{19\cdot 20} = \frac{33}{95} \approx 0,35.$$ Пусть A — событие, которое означает, что взятые шарики разного цвета. Этому событию благоприятствуют результаты, при которых первый шарик можно вынуть 12 способами, а второй — 8 способами, при этом любой шарик из 12 (белый) может комбинироваться с любым черным, то есть, использовав правило произведения, получим $N(A) = 12\cdot 8$. Поэтому искомая вероятность: $P(A) = \frac{12\cdot 8}{C_{20}^2} = \frac{12\cdot 8\cdot 2!18!}{20!} = \frac{12\cdot 8\cdot 2}{19\cdot 20} = \frac{48}{95} \approx 0,5$.
7. В одном ящике находятся 8 белых и 12 красных шариков, в другом — 15 синих и 5 черных шариков. Из каждого ящика наугад вынимают по одному шарику. Какова вероятность того, что вынули красный и черный шарики?
Решение.
Пронумеруем все шарики: $a_1, a_2, \ldots, a_8$ — белые; $a_9, a_{10}, \ldots, a_{20}$ — красные (в первом ящике), $b_1, b_2, \ldots, b_{15}$ — синие; $b_{16}, b_{17}, \ldots, b_{20}$ — черные (в другом ящике). В результате эксперимента получаем события (a_i, b_i) = «вынутый шарик a_i и вынутый шарик b_i». Эти события образуют множество результатов данного эксперимента. Поскольку шарики вынимаются наугад, то эти события равновозможны. По правилу произведения, число этих событий $N = 20\cdot 20 = 400$. Событию, интересующему нас, благоприятствуют результаты опыта, для которых выполняются неравенства: $9 \le i \le 20$ и $16 \le i \le 20$. Их число (по правилу произведения) при событии A, которое означает, что вынули красный и черный шарики, равно $N = 12\cdot 5 = 60$. Следовательно, $P(A) = \frac{60}{400} = \frac{3}{20} = 0,15$.

8. На соревнования по баскетболу приехали 18 команд, которые путем жеребьёвки разделены на две группы по 9 команд в каждой; 5 команд обычно занимают первые места. Какова вероятность того, что все лидирующие команды попадут в одну группу? Какова вероятность того, что две лидирующие команды попадут в одну группу, а три — во вторую?

Решение.

Обозначим события: A — «все 5 лидирующих команд попали в одну группу»; B — «2 лидирующие команды попали в одну группу, 3 — во вторую». Из 18 команд группы по 9 команд могут быть образованы C_{18}^9 способами, то есть $N = C_{18}^9$. Событию A благоприятствует столько событий, сколькими способами 5 лидирующих команд могут образовать девятки с четырьмя командами из 13 оставшихся команд. Поэтому как первая, так и вторая девятки могут быть образованы $_{13}^{4}$ способами. Поэтому $N(A) = 2C_{13}^4$. Следовательно, искомая вероятность $P(A)=\frac{2C_{13}^4}{C_{18}^9}=\frac{2\cdot 13!\cancel{9!}9!}{4!\cancel{9!}18!}=\frac{\cancel{2}\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{9}}{\cancel{2}\cdot 3\cdot\cancel{4}\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot\cancel{18}}=\frac{1}{34}$.

Аналогичные рассуждения подсказывают, что число событий, которые благоприятствуют событию B, равно: $N(B) = C_5^2\cdot C_{13}^7 + C_5^3\cdot C_{13}^6$.

Поэтому искомая вероятность: $P(B) = \frac{C_5^2\cdot C_{13}^7 + C_5^3\cdot C_{13}^6}{C_{18}^9} = \frac{12}{17}$.

9. Случайная величина X принимает значения $1, 2, 3, 4$, причём $P(X=1) = 0,4$; $P(X=2) = 0,3$; $P(X=3) = 0,2$. Найти $P(X=4)$; $P(X>2)$; $P(X\le 3)$; $P(1,5<X<3,7)$.

Решение.

Поскольку $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) = 1$, то

$P(X=4) = 1-(0,4+0,3+0,2) = 0,1$.

$P(X>2) = P(X = 3$ или $X = 4) = P(X=3)+P(X=4) = 0,2+0,1 = 0,3$.

Аналогично $P(X\le 3) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = 0,4+0,3+0,2 = 0,9$.

$P(1,5<X<3,7) = P(X=2)+P(X=3) = 0,5$.

10. Количество очков, выбиваемых при одном выстреле каждым из двух стрелков, имеют соответственно законы распределения:

а)

x_k	8	9	10
p_k	0, 4	0, 1	0, 5

б)

x_k	8	9	10
p_k	0, 1	0, 6	0, 3

Какой из двух стрелков стреляет лучше?

Решение.

Если X_i $(i = 1, 2)$ — количество очков, которое выбивает первый стрелок при одном выстреле, то $MX_1{=}8\cdot 0,4+9\cdot 0,1+10\cdot 0,5{=}9,1$; $MX_2{=}8\cdot 0,1+9\cdot 0,6+10\cdot 0,3{=}9,2$.

Среднее количество очков, которое выбивает второй стрелок при одном выстреле, несколько больше, чем у первого. Следовательно, второй стрелок стреляет лучше, чем первый.

11. Из ящика, в котором находятся 4 шарика, пронумерованные числами 0, 1, 2, 3, наугад берут два шарика. Составить закон распределения суммы номеров двух вынутых шариков.

Решение.

В этом испытании возможны такие результаты: (0, 1); (0, 2); (0, 3); (1, 2); (1, 3); (2, 3). Здесь (0, 1) означает, что первым вынули шарик с номером 0, а вторым — с номером 1. Вероятность элементарных событий одинакова, то есть равна $\frac{1}{6}$ (поскольку образовалось 6 пар шариков, а достать пару можно только одним способом). Найдя серии номеров двух шариков, можем составить таблицу.

Результаты испытания	0;1	0;2	0;3	1;2	1;3	2;3
Вероятности элементарных событий	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Суммы номеров	1	2	3	3	4	5

Все результаты испытания одинаково вероятны. Выпишем теперь все различные значения случайной величины — суммы номеров двух шариков — и подсчитаем соответствующие вероятности. Вероятность p_i находится сложением вероятностей всех элементарных событий, которые соответствуют значению x_i. Получим таблицу:

x_k	1	2	3	4	5
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

12. При сборке прибора для точной подгонки определенной детали необходимо сделать несколько попыток. При этом деталь, забракованная при сборке одного прибора, уже не используется при сборке других. Для установления количества деталей, которыми необходимо обеспечить рабочего, было проведено 00 наблюдений. Оказалось, что в 7 случаях понадобилась одна попытка, в 16 — две, в 55 — три, в 21 — четыре и в одном случае — пять попыток. Найти среднее количество деталей, необходимых для сборки одного прибора.

Решение.

Ответом на вопрос задачи является математическое ожидание количества деталей, необходимых для сборки одного прибора. По результатам 00 наблюдений можно подсчитать выборочное среднее количество деталей, необходимых для сборки одного прибора:

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(1 \cdot 7 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 55 + 4 \cdot 21 + 5 \cdot 1) = 2,93.$$

Таким образом, рабочему для сборки одного прибора нужно приблизительно три детали.

13. Найти математическое ожидание случайной величины X, равной числу очков, которые выпадают на игральном кубике при одном броске.

Решение.

Величина X принимает каждое из целых значений от 1 до 6 с вероятностью $\frac{1}{6}$, поэтому $MX = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3,5$.

14. Мишень разделена на восемь равных пронумерованных секторов и установлена так, что может вращаться вокруг горизонтальной оси. При достаточно большой угловой скорости стрелок не может различить цифры, написанные на секторах. Он вынужден стрелять наугад. При попадании в первый сектор стрелок выигрывает 1 грн, во второй сектор — 2 грн, в третий сектор — 3 грн и т.д. Стоит ли ему принимать участие в этой игре, если за каждый выстрел он должен платить 5 грн?

Решение.

Поскольку мишень вращается, то попадание здесь — чистая случайность. Случайная величина X выражает возможные выигрыши. Она может принимать значения $1, 2, 3, \ldots, 8$. Поскольку все сектора одинаковые, то каждое из этих значений — случайная величина — принимает с одинаковой вероятностью $\frac{1}{8}$.

Значит, $MX=1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{8}+5\cdot\frac{1}{8}+6\cdot\frac{1}{8}+7\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{8}=4,5$ (грн).

Следовательно, математическое ожидание выигрыша — 4, 5 грн, а стоимость выстрела 5 грн. Стрелять много раз невыгодно.

15. В цеху установлено два разных станка, изготовляющих одинаковые детали. Количество бракованных изделий, которые могут изготовить эти станки за сутки, имеют соответственно законы распределения а) и б):

а)

y_k	0	1	2	3
p_k	0, 6	0, 2	0, 15	0, 05

б)

y_k	0	1	2	3
p_k	0, 5	0, 25	0, 2	0, 05

1) Найти среднее количество бракованных деталей, которые изготовляет первый станок за 10 дней.

2) Каково среднее количество бракованных деталей, изготовленных цехом за сутки?

Решение.

Пусть X и Y — количество бракованных деталей, которые изготовляют, соответственно, первый и второй станки за сутки, $MX = 0,65$; $MY = 0,8$. За десять дней первый станок изготовляет $0X$ бракованных деталей. $M(10X) = 10MX = 6,5$. Цех за сутки изготовляет $X+Y$ бракованных деталей: $M(X+Y) = MX+MY = 0,65+0,8 = 1,45$.

16. Количество яиц, которое фермер отправляет на рынок каждую неделю, имеет такой закон распределения:

x_k(дес.)	5	6	7	8
p_k	0, 1	0, 4	0, 3	0, 2

Цена одного десятка яиц может равняться 2 грн, 2, 5 грн, 3 грн с вероятностями 0, 1; 0, 6; 0, 3 соответственно. Найти средненедельную выручку фермера от реализации яиц.

Решение.

Пусть X — количество яиц (в десятках), которые отправляет фермер каждую неделю на рынок, Y — цена одного десятка. Тогда Y — недельная выручка фермера. Нужно найти $M(XY)$. Случайные величины X и Y независимы, поэтому $M(XY) = MX\cdot MY$. Поскольку $MX = 5\cdot0,1+6\cdot0,1+7\cdot0,3+8\cdot0,2 = 6,6$ (грн), $MY = 2\cdot0,1+2,5\cdot0,6+3\cdot0,3 = 2,6$ (грн), то $M(XY) = 6,6\cdot2,6\approx17,2$ (грн).

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Татьяна и Игорь договорились встречать Новый год в компании из 10 человек. Они очень хотели сидеть рядом за праздничным столом. Какова вероятность исполнения их желания, если среди друзей принято распределять места путем жеребьевки?

2. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Мальчик, который не умеет читать, перемешал эти буквы, а потом наугад их сложил. Какова вероятность того, что он снова сложил слово «книга»?

3. На 5 карточках написано по одной цифре из набора 1, 2, 3, 4 и 5. Наугад выбираются одна за другой две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке больше, чем на первой?

4. В пруду плавают 14 окуней, 8 щук и 6 карасей. Рыбак поймал 6 рыб. Какова вероятность того, что среди пойманных рыб есть: 1 карась, 2 щуки и 4 окуня?

5. Ихтиолог хотел определить, сколько в пруду рыбы, пригодной для вылавливания. Для этого он закинул сеть с заранее заданным размером ячеек и, вытащив её, обнаружил 30 рыб. Пометив каждую из них, он бросил рыбу назад в пруд. На следующий день ихтиолог закинул ту же самую сеть и поймал 40 рыб, на двух из которых были его пометки. Каким образом он по этим данным определит приблизительное количество пригодных для вылавливания рыб в пруду?

Условная вероятность и независимость событий. Вероятность суммы событий

6. В ящике находятся 8 белых и 7 красных шариков. Последовательно вынимают два шарика. Какова вероятность того, что оба шарика белые?

7. Длительными наблюдениями установлено, что приблизительно в 90% выстрелов один стрелок попадает в мишень. Из общего количества метких выстрелов 40% заканчиваются попаданием в «десятку». Найти вероятность того, что следующий выстрел будет метким, причем стрелок попадет в «десятку».

8. В ящике пять белых и три чёрных шарика. Наугад один за другим вынимают два шарика, причем вынутый шарик в ящик возвращают. Какова вероятность того, что оба шарика белые?

9. Из колоды из 32 карт наугад вынимают одну за другой две карты. Найти вероятность того, что: а) вынули два туза; б) вынули две карты пиковой масти; в) вынули туз и даму?

10. В ящике лежат 15 деталей, из которых 9 стандартных и 6 бракованных. Наугад вынимают одну за другой 2 детали, причем вынутую деталь в ящик не возвращают. Какова вероятность того, что вторая деталь стандартная?

11. Два исследователя проводят измерения некоторой физической величины. Вероятности сделать ошибку во время снятия показаний с прибора для них соответственно составляют 0, 1 и 0, 15. Какова вероятность того, что при разовом замере оба исследователя сделают ошибки?

12. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же мишени и производят по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень у первого стрелка — 0, 6, у второго — , 7. Какова вероятность того, что оба стрелка попадут в мишень?

13. Наладчик обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа он будет регулировать один из станков, составляет для первого станка , 9, для второго — 0, 8 и для третьего 0, 85. Найти вероятность того, что:

а) в течение часа ни один станок не нужно будет регулировать;

б) в течение часа наладчик будет регулировать хотя бы один из трёх станков.

14. На испытательном стенде проходят испытания в определенных условиях 5 приборов. Вероятность выхода из строя какого-либо прибора в течение часа равна 0, 004, и эта вероятность одинакова для всех приборов. Найти вероятность того, что в течение часа выйдет из строя хотя бы один из приборов.

15. Прибор, который работает в течение суток, состоит из трех узлов, каждый из которых независимо от других может за это время выйти из строя. Если не работает хотя бы один из узлов, то прибор тоже не работает. Вероятность безотказной работы в течение суток первого узла равна $0,9$, второго — $0,95$, третьего — $0,85$. Чему равна вероятность того, что в течение суток прибор будет работать безотказно?

16. При многоразовом подбрасывании двух монет каждый из четырёх результатов ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ происходит в среднем в 25% испытаний. Обозначим: A_1 — «на первой монете выпал герб»; A_2 — «на второй монете выпал герб»; A_3 — «монеты выпали одинаково». Являются ли события A_1, A_2, A_3: а) попарно независимыми; б) независимыми в совокупности?

17. Два охотника одновременно и независимо один от другого стреляют в зайца. Заяц будет подстрелен, если попал хотя бы один охотник. Найти вероятность того, что зайца подстрелили, если вероятности попадания для охотников равны $0,8$ и $0,75$.

18. Вероятность попадания по мишени при одном выстреле равна $0,5$. Какова вероятность хотя бы одного попадания при 10 независимо произведенных выстрелах?

19. В ящике находятся 7 белых, 5 красных и 8 синих одинаковых на ощупь шариков. Наугад вынимают один шарик. Какова вероятность того, что он цветной?

20. Зачет по стрельбе считается сданным, если курсант получает оценку не ниже «4». Какова вероятность сдачи зачета курсантом, если известно, что он получает оценку «5» по стрельбе с вероятностью $0,3$ и оценку «4» с вероятностью $,5$.

21. Экзаменационные работы абитуриентов зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что номер наугад взятой работы кратный 10 или 11?

22. Из чисел $1, 2, \ldots, 20$ наугад выбирают число. Найти вероятность того, что это число делится на 2 или на 3.

23. Вероятность того, что ученик сдаст первый экзамен, равна $,9$, второй экзамен — $0,8$ и третий — $0,7$. Какова вероятность того, что ученик сдаст хотя бы один экзамен, если считать экзамены независимыми один от другого?

Независимые испытания. Схема Бернулли

24. Известно, что при каждом взвешивании в равной степени возможны как позитивная, так и негативная ошибки. Какова вероятность того, что при пяти взвешиваниях возможны три позитивные ошибки?

25. Бросаем монету 10 раз. Какова вероятность двукратного появления герба?

26. Вероятность того, что изделие не пройдет контроль, равна $0,125$. Какова вероятность того, что среди 12 изделий не будет ни одного, которое не прошло контроль?

27. Для данного баскетболиста вероятность попадания мяча в корзину при каждом броске равна $0,4$. Чего вероятнее ожидать: трёх попаданий при четырёх бросках или четырёх попаданий при шести бросках, если броски мяча считать независимыми?

28. Партия изделий содержит 15% брака. Какова вероятность того, что среди взятых для испытания четырёх изделий одно изделие окажется бракованным?

29. В ящике находятся 20 белых и 5 чёрных шариков. Последовательно вынимают 6 шариков, причём после каждого отбора шарик возвращается в ящик. Какова вероятность того, что среди отобранных шариков будет: а) ровно 4 белых; б) не меньше 4 белых?

30. В результате наблюдений замечено, что на каждую тысячу новорожденных в среднем приходится 515 мальчиков и 485 девочек. В одной семье шестеро детей. Найти вероятность того, что среди них не больше двух девочек.

31. Вероятность попадания в «десятку» при одном выстреле равна $0,2$. Сколько нужно произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не меньше $0,9$ попасть в «десятку» хотя бы один раз?

32. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не меньше 8 автомашин, а их 10. Вероятность невыхода каждой автомашины $0,1$. Найти вероятность нормальной работы автобазы.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-7-1

В-I	9 баллов	В-II
1. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.		1. В лифт 9-этажного дома на первом этаже зашли 6 человек. Найти вероятность того, что все выйдут на разных этажах, если каждый с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго?
2. Что вероятнее: выиграть в шахматы у равного себе игрока четыре партии из восьми или три из пяти?		2. В каждом из двух ящиков лежит по 10 деталей. В первом ящике — 2 детали бракованные, во втором ящике — 3 детали бракованные. Из каждого ящика берут по одной детали. Найти вероятность того, что: а) эти детали бракованные; б) эти детали стандартные.
3. В ящике 7 синих и 3 чёрных шарика. Наугад вынимают один за другим два шарика, причём вынутый шарик не возвращают. Какова вероятность того, что оба шарика синие?		3. Вы играете в шахматы с равным по силе партнером. Чего следует больше ожидать: трёх побед в четырёх партиях или пяти побед в восьми партиях?

В-III	12 баллов	В-IV
1. Студент купил лотерейный билет и наугад вычеркнул 6 номеров из 49. Найти вероятность того, что он угадал 3 номера из 6.		1. Двенадцать человек садятся за круглый стол. Найти вероятность того, что два конкретных человека случайно окажутся рядом.
2. Две лампы включены в электрическую цепь последовательно. Найти вероятность того, что при повышении напряжения произойдет разрыв цепи, если вероятность того, что при этих условиях лампа перегорит, для обеих ламп одинакова и равна 0,4.		2. Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка попадут в мишень; б) хотя бы один из стрелков попадет в мишень.
3. В ящике находятся a белых и b чёрных шариков. Последовательно вынимают два шарика. Какова вероятность того, что они оба белые?		3. Рабочий обслуживает 12 одинаковых станков. Вероятность того, что в течение часа один из станков нужно будет отрегулировать, равна приблизительно $\frac{1}{3}$. Какова вероятность того, что в течение часа рабочий должен будет отрегулировать хотя бы 4 станка?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-7-1

7 баллов

В-I

1. Из пруда, в котором было 40 щук, выловили 5 и, пометив их, выпустили в пруд. На следующий день выловили 9 щук. Какова вероятность того, что среди них будут две помеченные?

2. Из колоды из 36 карт наугад вынимают одну за другой две карты. Найти вероятность того, что из колоды вынули:
а) две десятки;
б) десятку и туз.

3. Игральный кубик бросили 8 раз. Найти вероятность того, что четыре очка выпадут: а) три раза; б) не меньше трёх раз.

4. Случайная величина X распределена по закону:

X	2	4	6	8	10
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Найти дисперсию случайной величины.

В-II

1. Из 10 лотерейных билетов 2 выигрышных. Найти вероятность того, что среди взятых наугад пяти билетов:
а) один выигрышный;
б) хотя бы один выигрышный.

2. В коробке находятся пять синих и три красных карандаша. Наугад вынимают один за другим 2 карандаша, причём их в коробку не возвращают. Какова вероятность того, что оба карандаша синие?

3. Изделия содержат % брака. Найти вероятность того,что среди пяти изделий:
а) не будет ни одного бракованного;
б) будет два бракованных изделия.

4. Две швеи в цеху шьют одинаковые сумки. Количества бракованных изделий, которые вероятно могут пошить швеи за день, имеют соответственно законы распределения а) и б):

а)

X	0	1	2	3
P	0, 6	0, 2	0, 05	0, 1

б)

X	0	1	2	3
P	0, 5	0, 25	0, 2	0, 05

Найти вероятное среднее количество бракованных изделий из всех пошитых второй швеей сумок за 7 дней.

<table>
<tr><th>В-III</th><th>9 баллов</th><th>В-IV</th></tr>
<tr><td colspan="1">1. 9 пассажиров садятся в 3 вагона. Найти вероятность того, что:
а) в каждый вагон сядут по 3 пассажира;
б) в один вагон сядут 4, во второй — 3, в третий — 2 пассажира.</td><td colspan="2">1. Для лотереи выпущено n билетов, из которых m — выигрышные. Найти вероятность выигрыша для человека, который купил k билетов.</td></tr>
<tr><td>2. Из колоды из 32 карт наугад вынимают две карты. Найти вероятность:
а) что вынули две карты бубновой масти;
б) что вынули даму и короля.</td><td colspan="2">2. В ящике 5 белых и 3 чёрных шарика. Наугад вынимают два шарика, причём вынутый шарик в ящик не возвращают. Какова вероятность того, что второй шарик белый?</td></tr>
<tr><td>3. Событие B наступает тогда, когда событие A наступает не меньше трёх раз. Найти вероятность наступления события B, если вероятность наступления события A при одном испытании равна 0, 3, и произойдет семь независимых испытаний.</td><td colspan="2">3. Игра состоит в нанизывании колец на стержень. Игрок получает 6 колец и бросает их до первого попадания. Найти вероятность того, что хотя бы одно кольцо останется ненанизанным.</td></tr>
<tr><td>4. Случайная величина X имеет закон распределения:
<table><tr><td>X</td><td>−2</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>0, 1</td><td>0, 1</td><td>0, 1</td><td>0, 2</td><td>0, 1</td><td>0, 2</td></tr></table>Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины.</td><td colspan="2">4. Еженедельно фермер отвозит на рынок определенное количество яиц, это количество имеет закон распределения:
<table><tr><td>X (дес.)</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr><tr><td>P</td><td>0, 1</td><td>0, 4</td><td>0, 3</td><td>0, 2</td></tr></table>Цена одного десятка яиц может быть равна 2, 5 грн, 3 грн, 3, 4 грн, с вероятностями 0, 2; 0, 6; 0, 1 соответственно. Найти средненедельную выручку фермера от реализации яиц.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>В-V</th><th>12 баллов</th><th>В-VI</th></tr>
<tr><td>1. В олимпиаде по химии принимает участие 21 ученик. Их разделили на 3 группы. Какова вероятность того, что:
а) в одну группу попадут 5 лучших учеников-химиков;
б) двое лучших попадут в первую группу, трое лучших попадут во вторую группу, а в третью не попадет ни один?</td><td colspan="2">1. Студент купил карточку «Суперлото» и наугад зачеркнул 6 номеров из 49. Какова вероятность, что:
а) он верно угадал два номера;
б) он верно угадал не меньше четырёх номеров.</td></tr>
<tr><td>2. В ящике a зеленых и b красных карандашей. Из ящика берут два карандаша. Какова вероятность того, что:
а) карандаши разного цвета;
б) карандаши одного цвета?</td><td colspan="2">2. Имеем правильный тетраэдр, три грани которого пронумерованы цифрами 1, 2 и 3, а на четвертой грани написаны все три цифры. Тетраэдр подбрасывают и смотрят, какая выпала цифра (какой гранью он упал). Обозначив соответствующим числом события, найти, с какой вероятностью может выпасть цифра «1»; цифра «2»; цифра «3»; и вероятность выпадения всех трёх цифр?</td></tr>
<tr><td>3. Какова вероятность того, что при десяти бросках игрального кубика 3 очка выпадут не меньше двух и не больше пяти раз?</td><td colspan="2">3. Вероятность взятия 11-метрового штрафного удара равна $\frac{1}{5}$. Какова вероятность того, что:
а) вратарь возьмет два мяча из 5;
б) вратарь возьмет хотя бы один мяч из 5?</td></tr>
<tr><td>4. На основе анализа выборки, состоящей из замеров 800 початков кукурузы, получили данные о длине початков, которые замеряны с точностью до одного сантиметра:
<table>
<tr><td>Длина (см)</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td></tr>
<tr><td>Кол-во</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>23</td><td>35</td><td>50</td><td>95</td></tr>
<tr><td>Длина (см)</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr>
<tr><td>Кол-во</td><td>166</td><td>162</td><td>112</td><td>67</td><td>40</td><td>22</td><td>16</td><td>2</td></tr>
</table>
Вычислить среднее значение длины початка.</td><td colspan="2">4. Выпущено 500 лотерейных билетов, причём на каждый из 40 билетов выпадает выигрыш в 1 грн, 10 билетов принесут их владельцам выигрыш по
5 грн, 5 билетов — по 10 грн. Остальные билеты не выиграют. Составить закон распределения выигрыша. Найти средний выигрыш, который выпадает на один билет.</td></tr>
</table>

§8. Введение в статистику

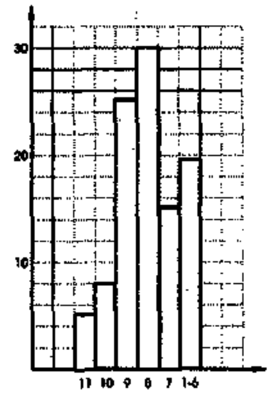
Начальные сведения о математической статистике

Раздел прикладной математики, в котором исследуются количественные характеристики массовых явлений, называется **математической статистикой** (от лат. «status» — «состояние»). Математическая статистика — наука о математических методах систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов.

1. Решить задачу.

Восьмиклассники одной школы написали контрольную работу по математике. Из них на «11» — 5, на «10» — 8, на «9» — 25, на «8» — 30, на «7» — 15, на «1—6» — 19.

Решение.
Построим столбчатую диаграмму:



Количественные характеристики проведенной контрольной работы можно представить в виде таблицы:

Оценки	11	10	9	8	7	1-6
Кол-во учеников	5	8	25	30	15	19

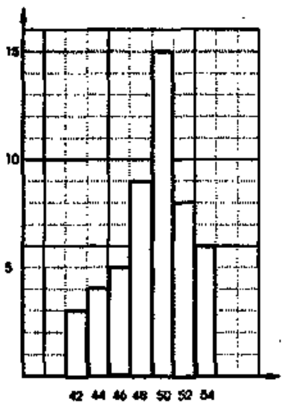
Наглядно изобразить эти данные можно с помощью столбчатой диаграммы.

Столбчатые диаграммы в статистике называют гистограммами.

2. Решить задачу.

Швейной мастерской надо знать, сколько мужских пальто и каких размеров надо сшить. Как это выяснить?

Решение.
По частотной таблице (размеры пальто) построим гистограмму:



Опросить всех слишком дорого и долго. Поэтому делают выборку: опрашивают выборочно несколько десятков или сотен людей. Допустим, что, опросив 50 мужчин, их размеры записали в таблицу:

50	42	48	50	46	48	52	44	50	50
50	50	44	54	44	50	50	46	50	48
42	50	50	54	52	54	54	42	48	52
44	48	50	52	50	54	46	52	52	52
48	48	46	48	52	46	50	50	54	46

Это — выборка 50 значений (данных). Для удобства её группируют в классы (по размерам) и отмечают, сколько значений выборки содержит каждый класс.

Размер пальто	42	44	46	48	50	52	54
Кол-во мужчин	3	4	5	9	15	8	6

Такие таблицы называют частотными. В них числа второй строки — частоты; они показывают, как часто встречаются в выборке те или другие её значения. Относительной частотой значения выборки называют отношение его частоты к числу всех значений выборки. В рассмотренном примере частота размера 44 равна 4, а относительная частота — %. Выборки характеризуют центральными тенденциями: **средним значением, модой и медианой. Средним значением** выборки называют среднее арифметическое всех её значений. **Мода выборки** — те её значения, которые встречаются чаще всего. **Медиана выборки** — это число, «разделяющее» пополам упорядоченную совокупность всех значений выборки.	
3. Решить задачу.	Найти центральные тенденции выборки: 1,3; 1,8; 1,2; 3,0; 2,1; 5; 2,4; 1,2; 3,2; 1,2; 4; 2,4.
Решение. Упорядочим выборку: Мода данной выборки равна , 2. Среднее значение выборки: Медиана выборки:	1,2; 1,2; 1,2; 1,3; 1,8; 2,1; 2,4; 2,4; 3,2; 3,8; 4; 5. $\frac{1,2+1,2+1,2+1,3+1,8+2,1+2,4+2,4+3,2+3,8+4+5}{12} =$ $= \frac{29,6}{12} = \frac{296}{120} = \frac{35}{15}$. $\frac{2,1+2,4}{2} = \frac{4,5}{2} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$.
4. Решить задачу.	Найти центральные тенденции выборки: 1, 4, 2, 5, 3, 6, 1, 3, 5, 4, 5.
Решение. Упорядочим её: Мода данной выборки равна 5, потому что 5 встречается чаще всего. Среднее значение выборки:	1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6. $\frac{1+1+2+3+3+4+4+5+5+5+6}{11} = \frac{39}{11}$. Медиана выборки равна 4, поскольку число 4 «разделяет» упорядоченную выборку пополам. Если упорядоченная выборка имеет парное число значений, тогда её медиана равна полусумме двух её средних значений.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Данная выборка: 6; 9; 8; 7; 5; 4; 4; 32; 9; 8; 4; 1. Найти её моду, медиану и среднее значение. Построить соответствующую гистограмму.

2. За решение задач 6 участников олимпиады получили от 1 до 3 баллов, 12 человек — от 4 до 6 баллов, 14 человек — от 7 до 9 баллов; 23 участника — от 10 до 11 баллов,

4 — участника — 12 баллов, 15 участников — от 13 до 18 баллов, 8 участников — от 22 до 25 баллов. Составить частотную таблицу, построить гистограмму.

3. Найти моду, медиану и среднее значение выборки:

13; 12; 12; 13; 17; 15; 18; 18; 11; 18.

4. Найти центральные тенденции выборки:

1,4; 1,6; 1,3; 1,7; 1,4; 1,4; 1,8; 1,7; 1,7; 1,9; 1,4.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-8-1

В-I	В-II
Найти моду, медиану, среднее значение выборки:	
0, 98; 0, 95; 1, 02; 1, 06; 0, 98; 1, 0; 1; 0, 1; 0, 98; 0, 95.	1, 15; 1, 12; 0, 94; 1, 04; 1, 15; 0, 96; 0, 94; 1, 25; 1, 04; 0, 94; 0, 95.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА (30 мин.)

<table>
<tr><th>В-I</th><th>В-II</th></tr>
<tr><td>1. Дано 50 чисел. Из них число 1 встречается 5 раз, число 2 — восемь раз, число 4 — семь раз, число 8 — двенадцать раз, число 10 — пятнадцать раз, число 11 — тринадцать раз. Составить частотную таблицу и найти относительную частоту чисел 8 и 10.</td><td>1. Рост 16-летних учеников принимается за нормально распределенную случайную величину. В случайной выборке из 10 учеников получили такие данные (в см):
170; 176; 165; 171; 167; 179; 185; 175; 180; 177. Найти центральные тенденции выборки.</td></tr>
<tr><td>2. По таблице построить гистограмму.
<table>
<tr><td>Рост учеников (в см)</td><td>140 - 45</td><td>46 - 50</td><td>51 - 55</td></tr>
<tr><td>Кол-во</td><td>5</td><td>7</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Рост учеников (в см)</td><td>56 - 60</td><td>61 - 64</td><td></td></tr>
<tr><td>Кол-во</td><td>4</td><td>6</td><td></td></tr>
</table></td><td>2. За решение задач участники школьной олимпиады получили: от 0 до 3 баллов — шесть учеников, от 4 до 6 — двенадцать, от 7 до 9 — восемнадцать, от 10 до 12 — четыре, от 13 до 15 — шесть, от 15 до 20 — два ученика. Составить частотную таблицу, построить гистограмму и определить центральные тенденции выборки.</td></tr>
</table>

Ответы

Тренировочные упражнения

§ 1.

1. в) $2;2\pm\sqrt{8}$; г) $\pm 1;\pm\sqrt{\frac{7}{5}}$. 2. а) $(-1;2)$; в) $(-\infty;-6]\cup[1;+\infty)$; г) $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$; д) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$; е) $\left[\frac{5}{3};5\right]$;

ж) $(-2;2)$. 6. а) $[-5;3]\cup[7;\infty)$; б) $\varnothing$; в) $\{3\}\cup[-2;1)\cup\{1\}$. 8. з) $\frac{1}{2}<x\le 2$; и) $\left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-1\end{array}\right.$.

9. а) -10; б) 5; д) $\frac{3}{5}$; п) $\frac{1}{4}$; с) 0; т) $\frac{1}{2}$. 17. а) $(-1)^{n+1}-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$; б) $\pi n, n\in Z$.

20. $y = 4x-9$. 21. $(-1;0)$. 22. $M(1;-12)$. 23. $45°;135°$. 24. $y = x+\frac{\pi}{2}$. 25. а) $k = 5$; б) $k = 3$.

26. $y = 3x-2$. 27. а) $t = 2$; б) $t = 5$. 28. а) $3;12$; б) $8;2$; в) $5;4$. 29. $t = 2$ с. 30. 40 Дж.

§ 2.

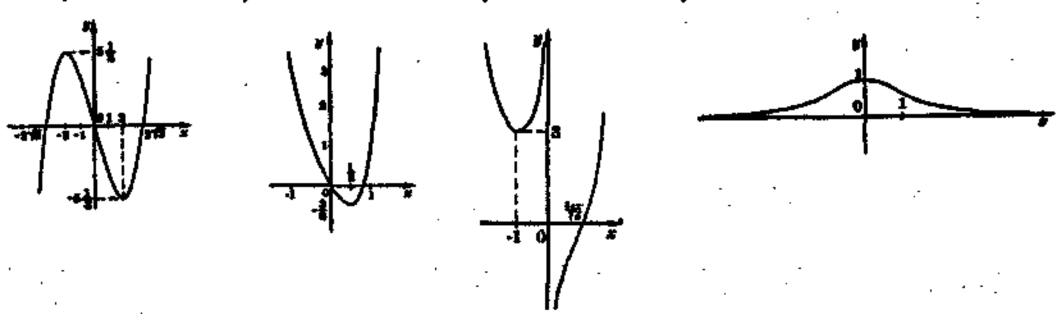
1. а) возрастает на $(-\infty;-3]$ и $[1;+\infty)$; б) убывает на $[-1;1)$ и $(1;3]$; возрастает на $(-\infty;-1]$ и $[3;+\infty)$; в) возрастает на $(-\infty;0]$; убывает на $[0;+\infty)$; г) возрастает на всей числовой прямой; д) возрастает на $[-4;1]$ и $[2;+\infty)$; убывает на $(-\infty;-4]$ и $[-1;2]$;
е) возрастает на $(-\infty;-1)$ и $[2;+\infty)$; убывает на $(-1;2]$; ж) возрастает на $[3;+\infty)$; убывает на $(-\infty;0]$. 3. Возрастает на R.

5. а) $-2;-6$; б) $-4;1;6$; в) $0;1;2$; г) $4\pi n, n\in Z$; д) 0; е) $-1;0;1$; ж) $-1;0;1$; з) $\frac{1}{3}$;

и) $(-1)^k\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}, k\in Z$; к) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; л) $\frac{1}{3}arctg\frac{4}{3}\pm\frac{1}{3}arccos\frac{1}{5}+\frac{2\pi k}{3}, k\in Z$. 6. $a>3$.

7. а) $x = -1$ — точка минимума; $x = 1$ — точка максимума; $f_{\min} = f(-1) = -2$; $f_{max} = f(1) = 2$; в) $x = 1$ — точка минимума; возрастает на $[1;+\infty)$; д) $x = 0$ — точка минимума; е) $x = 0$ — точка максимума; $x = 2$ — точка минимума. 8. $b = 2\pm 10\sqrt{2}$.
9. $p\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$. 10. $a = -2;2$. 11. $a\in(-16;16)$.

13. а) б) в) г)



14. ж) $3;1$; з) $10;6$. 16. $24;24$. 18. 3 ед^2. 19. $\frac{R}{\sqrt{5}};\frac{4R}{\sqrt{5}}$. 20. $n = 2R$. 21. $16\sqrt{3}$ дм^3. 24. $14,25$.

25. $b\in(-3;3]$.

§ 3.

2. е) $-\frac{1}{5(5x-2)}+c;-\frac{1}{2}\sqrt{3-4x}+c;\frac{(2x+1)^5}{10}+c;\frac{2}{9(1-0,5x)^9}+c$. 3. а) $y = x^3-x^2-3x$;

б) $y(x) = sin2x+cos3x$. 4. в) $-\frac{1}{2}cos2x+c;\frac{1}{8}sin8x+c;-\frac{1}{10}ctg10x+c$;

г) $2\sqrt{x-1}+c;-\frac{2\sqrt{4-5x}}{5}+c;-\frac{1}{x-2}+c;\frac{3}{7-\frac{x}{3}}+c$. 6. в) $1\frac{13}{32};5\frac{2}{35}$; г) $\frac{1}{5};\frac{2-\sqrt{2}}{4};\frac{2}{3};2$. 9. а) $\frac{4}{3}$; б) 13;

в) 4, 5; г) $2\frac{2}{3}$; д) $\frac{5}{6}$; е) $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$; ж) $\frac{13}{6}$; з) 1. 10. $a\in(-1;3)$. 11. 480 м. 12. $20\frac{2}{3}$.

§ 4.

1. д) $f'(x)=5x^4\cdot e^x+x^5\cdot e^x; f'(x)=\frac{3x-x^3}{e^x}; f'(x)=\frac{e^x\cdot(x\cdot\ln x-1)}{x\cdot\ln^2 x}$;

е) $f'(x)=6\cdot e^{-2x}\cdot\sin 3x; f'(0)=6\cdot e^0\cdot\sin 0=0; f'(x)=-2\cdot e^{-x}\cdot\cos 2x$;

$f'(0)=-2\cdot e^0\cdot\cos 0=-2$. 3. а) $-\frac{1}{3}\cdot\ln 4$; б) $9\cdot e^6-e^2$; в) $48+27\ln 2$; г) $\frac{\ln 14-\ln 2}{\ln 7}$.

5. а) $\ln 2-\ln 1$; б) e^4-e^2; в) $2,5+6\cdot(\ln 2-\ln 3)$; г) $4-3\ln 3$. 6. $y_{кас.}=2+2\ln 2(x-4)$.

7. $\max\limits_{[-1;2]} y(x)=8\frac{11}{19}; \min\limits_{[-1;2]} y(x)=6,5$.

§ 5.

9. а) $(3;-1)$; б) $x=t; y=-2t$, t — любое действительное число; в) $(-1;3)$; г) не подтверждается ни для каких $x;y$. 14. г) $5x^2+14x+13=0$. 21. к) $2(\cos 340°+i\sin 340°)$.

24. а) $1; \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{90}=\left(\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)^{30}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

§ 6.

4. а) $\approx 4,0$; б) $\approx 21,48$; в) $\approx 6,10$. 6. $A\cap B=\{3,5,7,11,13,17,19\}$. 7. Когда $A\subset B$.

8. а) $A\cap B\subset A$; б) $A\subset A\cup B$; в) $A\cap B\subset A\cup B$. 9. 94;65. 10. 14. 11. $A_{10}^5=30240$.

12. 648. 13. $P_9=362880$. 14. $C_{10}^3=120$. 15. 306 матчей. 16. $\frac{28!}{(7!)4}$. 17. $A_0^3=120$.

23. 665280. 24. в) 1245. 25. а) $\frac{11}{2}$; б) $\frac{22}{63}$; в) 3. 26. A_8^4. 27. а) 7. 28. $A_{10}^5=30240$. 29. 792.

31. $90x^2$.

§ 7.

1. $P(A)=\frac{2}{9}$. 2. $P(A)=\frac{1}{120}$. 3. $P(A)=\frac{C_5^2}{20}=\frac{1}{2}$. 4. $P(A)\approx 0,142$. 5. $n\approx 600$. 6. $P(AB)=\frac{4}{15}$.

7. $P(A\cdot B)\approx 0,36$. 8. $P(A)=P(A_1)P\left(\frac{A_2}{A_1}\right)=\frac{25}{64}$. 9. а) $P(A\cdot B)=\frac{3}{248}$; б) $P(C\cdot D)=\frac{7}{124}$;

в) $P(A\cdot E)=\frac{1}{62}$. 10. $P(A_2)=\frac{3}{5}$. 11. $P(A_1A_2)=0,015$. 12. $P(A_1A_2)=0,42$.

13. а) $P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=0,612$; б) $P(B)=0,997$. 14. $P(A)=0,0198$. 15. $P(A)\approx 0,73$.

16. События A_1, A_2, A_3 попарно независимы и не являются независимыми в совокупности.

17. $P(A)=0,95$. 18. $P(A)\approx 0,999$. 19. $P(A+B)=0,65$. 20. $P(A+B)=0,8$.

21. $P(A+B)=\frac{17}{90}$. 22. $P(C)=\frac{13}{20}$. 23. $P(A)=0,994$. 24. $P_n(m)=0,3125$.

25. $P_{10}(2)\approx 0,04395$. 26. $P_{12}(0)\approx 0,2514$. 27. Попадание трех мячей при четырех бросках мяча.

28. $P_4(1)\approx 0,371$. 29. а) $P_6(4)=0,246$; б) $P_6(m\geq 4)=0,901$.

30. $P_6(m\leq 2)=0,370$. 31. Нужно сделать минимум десять выстрелов. 32. $P_{10}(8)=0,92$.

Самостоятельные работы

С-1-1

В-I 1. $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$. 2. а) $x\ge 1$; б) $x\ne\frac{\pi}{2}n,\ n\in z$.

В-II 1. $(-\infty;-3)\cup(-2;2)$. 2. а) $x\le\frac{1}{2}$; б) $x\ne 6\pi n,\ n\in z$

В-III 1. $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. 2. а) $\left[\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{5\pi}{12}+\pi n\right],\ n\in Z$; б) $x\ne\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$.

В-IV 1. $x\ge-\frac{1}{3}$. 2. а) $\left[\frac{\pi}{2}+4\pi n;\frac{7\pi}{2}+4\pi n\right],\ n\in Z$; б) $x\ne\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

В-V 1. $[-4;1)\cup(1;+\infty)$.
2. а) $(0;1]$; б) $(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$; в) $[1;2]$. В-VI 1. $(-2;2)\cup\{5\}$. 2. а) $(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$;
б) $\left(-2;-\frac{1}{3}\right)$; в) $[-\pi;\pi]$.

С-1-2

В-I 1. $[-2,4;2,4]$. 2. $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$. 3. а) -11; б) -4; в) 5.
В-II 1. $(-\infty;-14]\cup[-2;+\infty)$. 2. $(-4;4)$. 3. а) -22; б) 6. в) 2.
В-III 1. $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup(3;+\infty)$. 2. $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty]$. 3. а) 2; б) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$; в) $\frac{5}{6}$.

В-IV 1. $\left(-\frac{3}{4};1\right)$. 2. $(-\infty;1)\cup[3;+\infty]$. 3. а) -2; б) $2\sqrt{2}$.

В-V 1. $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$. 2. $(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$. 3. $(0;1,5)\cup(1,5;+\infty)$.

4. а) $1,7\sqrt{2}$; б) 1; в) -10.
В-VI 1. $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$. 2. $(-\infty;3]\cup(4;7]\cup[8;+\infty)$. 3. $(1;2)$.
4. а) $17+3\sqrt{2}$;; б) 3; в) $-12\frac{3}{8}$.

С-1-3

В-I 1. 6. 2. а) $10x+\frac{1}{2\sqrt{x}}-2sinx$; б) $2xsinx+x^2cosx$; в) $\frac{6cosx+6xsinx}{cos^2x}$.

В-II 1. -15. 2. а) $24x^5+14x-6-\frac{4}{x^5}$; б) $\frac{cosx}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}sinx$. в) $\frac{x^3cosx-3x^2sinx}{x^6}$.

В-III 1. 4. 2. а) $8x-\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^2}$; б) $3sinx+(3x+1)cosx$; в) $-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$.

В-IV 1. 14. 2. а) $-\frac{20}{x^{11}}+\frac{10}{x^{21}}-\frac{30}{x^{31}}$; б) $(2x-2)sinx+(x^2-2x-3)cosx$; в) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

В-V 1. $\frac{2}{3}$. 2. а) $-\frac{6}{x^3}+\frac{3}{5x^4}-\sqrt{x}$; б) $2x^4+5x^3-9x^2+2x-42$; в) $\frac{sinx-cosx-1}{(1+cosx)^2}$.

В-VI 1. -3. 2. а) $x+\frac{9}{x^4}+\frac{3}{2}\sqrt{x}$; б) $8x^7-16x^6+5x^4-4x^3+14x^2-1$; в) $-\frac{2cosx}{(1+sinx)^2}$.

С-1-4

В-I 1. а) $24(8x+5)^2$; б) $\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$; в) $7cos7x$. 2. $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$.

В-II 1. а) $\left(\frac{x}{4}-7\right)^3$; б) $-\frac{5}{2\sqrt{-5x+4}}$; в) $\frac{1}{4}sin\frac{x}{4}$. 2. $(-1)\frac{n\pi}{3}+\pi n$, $\left(-\frac{2}{3}\pi+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$.

В-III 1. а) $(12x-18)(x^2-3x)^5$; б) $\frac{7\cos 7x-5}{2\sqrt{\sin 7x-5x}}$. 2. $\pi+4\pi n;\varnothing$

В-IV 1. а) $3x^4\left(\frac{1}{5}x^5-7\right)^2$; б) $\frac{2x-3\sin 3x}{2\sqrt{x^2+\cos 3x}}$;

в) $-\frac{24(4x-5)^2}{(4x-5)^6}$. 2. $\pm\frac{\pi}{2}+4\pi n, \left(-\frac{\pi}{2}+4\pi n;\frac{\pi}{2}+4\pi n\right)$.

В-V 1. а) $-\frac{100x^4(x^2-1)}{(x^5-1)^{10}}$; б) $\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{tg 2x}}$; в) $9\sin^2 3x\cos 3x$. 2. $(-5;1]\cup[3;0)$.

В-VI 1. а) $\frac{40(2x-3)}{(x^2-3x)^5}$; б) $-\frac{2}{\sqrt{ctg\frac{x}{4}}\sin^2\frac{x}{4}}$; в) $30x\sin^2 5x^2\cos 5x^2$. 2. $(5;2]\cup[-2;4)$.

С-1-5

В-I 1. 64 м/с. 2. $y = 2x-11$. 3. $\varphi_1 = arctg4;\varphi_2 = \pi-arctg4$. В-II 1. 20 м/с. 2. $y = 3x-11$. 3. $\varphi_1 = arctg6;\varphi_2 = \pi-arctg6$.

В-III 1. $\frac{7}{4}$ с. 2. $y = 2x+2$. 3. $\varphi = \pi-2arctg2$.

В-IV 1. 2 м/с^2. 2. $y = -4x+20$. 3. $\varphi = \pi-2arctg4$.

В-V 1. $t = 1$ с. 2. $y = 6x-12$. 3. $\varphi = \pi-arctg2-arctg6$.

В-VI 1. 4 с. 2. $y = 8x-34$. 3. $\varphi = \pi-2arctg4$.

С-2-1

В-I 1. Возрастает на $(-\infty;-1]$ и $[3;+\infty)$, убывает на $[-1;3]$. 2. $\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$.

В-II 1. Возрастает на $[-3;1]$, убывает на промежутках $(-\infty;-3]$ и $[1;+\infty)$. 2. $\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}n, n\in Z$.

В-III 1. Возрастает на промежутках $[-1;0]$ и $[1;\infty)$, убывает на промежутках $(-\infty;-1]$ и $[0;1]$. 2. $(-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}k, k\in Z$.

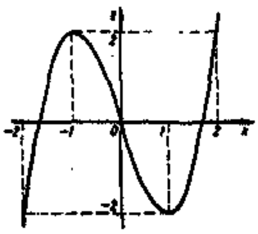
В-IV 1. Возрастает на $[-2;0]$ и $[2;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-2]$ и $[0;2]$. 2. $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$.

В-V 1. Возрастает на $[-3;-1)$ и $(-1;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-3]$. 2. $\frac{\pi n}{2}, n\in Z$.

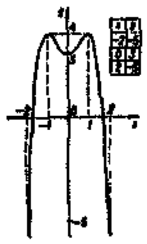
В-VI 1. Возрастает на $[-5;-3)$ и $(-3;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-5]$. 2. $\frac{\pi n}{2}, n\in Z$.

С-2-2

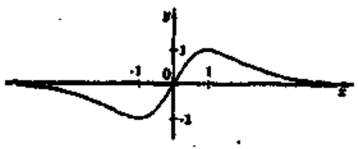
В-III



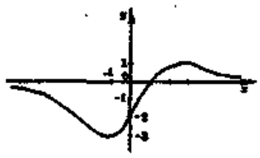
В-IV



В-V



В-VI



С-2-3

В-I 6 и 6. В-II 5 и 5. В-III 4 и 4. В-IV 4.

С-3-1

В-I 2. $y(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$. 3. а) $-\frac{1}{20}cos20x + c$. В-II 2. $y(x) = x - x^2 + x^3 - x^4 + 1$;

3. а) $-5cos\frac{x}{5} + c$. В-III 2. $y(x) = -cos2x - sin5x$. 3. б) $\frac{(1-2x)^5}{-10} + c$.

В-IV 2. $y(x) = 2sin\frac{x}{2} - 2cos2x - 2$. 3. а) $\frac{-1}{3x\sqrt{x}} + c$. В-V 2. $y(x) = -\frac{1}{16}cos4x + c$.

3. а) $8\sqrt{1+\frac{x}{4}} + c$. В-VI 2. $y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}sin8x - \frac{\pi+2}{32}$. 3. а) $\sqrt{1+2x} + c$.

С-3-2

В-I 1. $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$. 2. 0. В-II 1. 9. 2. 2. В-III 1. $\frac{1}{2}$. 3. $(2;3)$. В-IV 1. $4\frac{2}{3}$. 3. $(2;+\infty)$.

В-V 1. 3. 3. $(3;+\infty)$. В-VI 1. $21\frac{1}{3}$. 3. $(3;+\infty)$.

С-4-1

В-I 1. Функция возрастает на промежутке $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$; функция убывает на промежутке $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

В-II 1. Функция возрастает на промежутке $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$; функция убывает на промежутке $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

В-III 1. Функция возрастает на промежутке $(0;1]$; функция убывает на промежутке $[1;+\infty)$.
В-IV 1. Функция возрастает на промежутке $(0;e]$; функция убывает на промежутке $[e;+\infty)$.

В-V 1. Функция возрастает на промежутке $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$; функция убывает на промежутке $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

2. $\frac{3}{2} - 2ln2$. В-VI 1. Функция возрастает на промежутке $(1;2]$; функция убывает на промежутке $(-\infty;-1)$ и $[2;+\infty)$. 2. $4 - 3ln3$.

С-5-1

В-I 1. в) $34i$; г) $\frac{6}{5} + \frac{12i}{5}$; е) i. 2. $(\sqrt{5}a + \sqrt{b}i)(\sqrt{5}a - \sqrt{b}i)$. 3. $-\frac{1}{2} + i; -\frac{1}{2} - i$.

В-II 1. в) $-11 - 10i$; г) $\frac{4}{5} - \frac{8}{5}i$; е) -1. 2. $(\sqrt{a} + \sqrt{2}bi)(\sqrt{a} - \sqrt{2}bi)i$. 3. $7 + 5i; 7 - 5i$.

В-III 1. г) $4i - 3$; е) $\pm(4 - 3i)$. 3. $-1; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. В-IV 1. г) $28 + 96i$; е) $\pm(3 - 2i)$. 3. $2; -1 \pm \sqrt{3}i$.

В-V 1. в) $\frac{3\sqrt{2}+3}{4} + \frac{3-\sqrt{6}}{4}i$; г) $-24\sqrt{3}i$; е) $\pm(2 - 3i)$. 3. $-\frac{1}{3}; \frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}i$. В-VI 1. в) $-\frac{6\sqrt{2}}{19} - \frac{17}{19}i$;

е) $\pm(1 + 2i)$. 3. $\frac{5}{3}; -\frac{5}{6} \pm \frac{5\sqrt{3}}{6}i$.

С-5-2

В-I 3. в) $-729i$; г) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. В-II 3. в) $8 + 8\sqrt{3}i$; г) $\sqrt{3} - i; -\sqrt{3} + i$.

В-III 3. в) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; г) $cos\frac{120° + 360°k}{3} + i sin\frac{120° + 360°k}{3}, k = 0;1;2$.

В-IV 3. в) i; г) $2\left(\cos\frac{300°+360°k}{4}+i\sin\frac{300°+360°k}{4}\right), k = 0;1;2;3$.

В-V 3. б) $\cos 190° + i\sin 190°$; в) 1; г) $\cos\frac{250°+360°k}{5}+i\sin\frac{250°+360°k}{5}, k = 0;1;2;3;4$.

В-VI 3. б) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; в) 64; г) $\cos\frac{60°+360°k}{6}+i\sin\frac{60°+360°k}{6}, k = 0;1;2;3;4;5$.

С-6-1

В-I. 3. 420. В-II 3. 120. В-III 2. 16;18. 3. $A_9^4 = 3024$. В-IV 2. 20;190. 3. $C_{12}^3 = 220$.

В-V 1. $12n+6$ $(n = 0, 1, 2...)$. 2. $\frac{1}{15}$. 3. 12. В-VI 1. 22. 2. $k(k+1)$. 3. 16.

С-7-1

В-I 1. $P(A) = \frac{12!}{12^{12}} \approx 0,00005$. 2. Вероятнее будет выиграть 3 партии из 5. 3. $P(A) = \frac{7}{15}$.

В-II 1. $P(A) = 0,077$. 2. $P(\bar{A}\bar{B}) = 0,56$. 3. $P_{12}(4) \approx 0,238$. В-III 1. $P(A) = 0,0176$.

2. $P(A) = 0,64$. 3. $P(A\cdot B) = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$. В-IV 1. $P(A) = \frac{2}{11}$.

2. $P(A_1+A_2) = 0,94$. 3. Следует ожидать трех побед в четырех партиях.

Контрольные работы

К-1-1

В-I 3. $-\frac{1}{3}$. В-II 3. 0. В-III 2. б) $\frac{4x-x^2+3}{(2-x)^2}$. 3. -2. В-IV 2. б) $\frac{x^2+2x+4}{(4-x)^2}$. 3. $\frac{8}{3}$.

В-V 2. а) $1+\frac{2}{\sqrt{x-2}}$; б) $\frac{16x}{(5+x^2)^2}$. 4. $y = -2x-2$. В-VI 2. а) $1-\frac{2}{\sqrt{x+2}}$; б) $\frac{6x}{(1-x^2)^2}$.

4. $y = -x-1$; $y = 7-x$.

К-2-1

В-I 1. а) не существует; б) $\frac{5}{2}$. 2. $x = 0$ — точка максимума, $x = 4$ — точка минимума; увеличивается на участках $(-\infty;0]$ и $[4;+\infty)$, уменьшается на $[0;4]$.

3. $\max\limits_{[0;3]} y(x)=y(0) = 0$; $\min\limits_{[0;3]} y(x)=y(2) = -5\frac{1}{3}$.

В-II 1. а) не существует; б) $\frac{5}{2}$. 2. $x = -\frac{1}{2}$ — точка максимума, $x = 0$ — точка минимума; $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ — участок уменьшения, $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ и $[0;+\infty)$ — участок увеличения.

3. $\max\limits_{[-2;0]} y(x)=y(-2) = \frac{2}{3}$; $\min\limits_{[-2;0]} y(x)=y(-1) = -\frac{2}{3}$. В-III 1. а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$; б) 0;3.

2. $x = \pm 2$ — точки минимума; $x = 0$ — точка максимума.

3. $\max\limits_{[-2;4]} y(x) = 2$; $\min\limits_{[-2;4]} y(x) = -2$. В-IV 1. а) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k \in Z$; б) $0;1,5$. 2. $x = -4$ — точка минимума; $x = 4$ — точка максимума. 3. $\max\limits_{[0;2]} y(x) = 0$; $\min\limits_{[0;2]} y(x) = -1$.

В-V 1. ± 2. 2. Точек экстремума нет. 3. $\max\limits_{[0;\pi]} y(x) = 3$; $\min\limits_{[0;\pi]} y(x) = -1, 5$. 4. 5;9.

В-VI 1. ± 3. 2. Увеличивается на $(1;+\infty)$, уменьшается на $(-\infty;1)$.

3. $\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]} y(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $\min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]} y(x) = -2$. 4. $-1;0$.

К-2-2

В-III 3. $2;-2$. В-IV 3. $0;-1$. В-V 3. $1;-1$. 4*$5;9$. В-VI 3. $\frac{3\sqrt{3}}{2};-2$. 4*$-1;0$.

К-3-1

В-I 1. а) $\frac{7x^2}{2}-3x+c$; б) $\frac{x^5}{5}+2\cos x+c$; в) $\frac{1}{2x^2}$. 2. а) $-1\frac{1}{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. $1\frac{1}{3}$ (кв.ед.).

В-II 1. а) $\frac{3x^2}{2}-x+c$; б) $\frac{x^6}{6}+6\sin x+c$; в) $-\frac{1}{x}$. 2. $-2\frac{2}{3};0$. 3. $10\frac{2}{3}$ (кв.ед.).

В-III 2. $6;1$. 3. $4,5$ (кв.ед.). В-IV 2. $-8;-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 3. $20\frac{5}{6}$ (кв.ед.). В-V 2. $-57;\frac{7}{24}$. 3. 9.

В-VI 2. $217\frac{4}{5};\frac{5}{24}$. 3. 9.

К-4-1

В-I 3. $y = 2e^2x-e^2$. В-II 3. $y = 0,5ex-0,5e$. В-III 2. а) $-\frac{1}{3}e^{1-3x}+\frac{3\cdot 4^{\frac{x}{3}+1}}{\ln 4}+c$;

б) $\frac{5}{2}\ln|2x-1|+\frac{2\cdot(0,5x-3)^{\sqrt{7}+1}}{\sqrt{7}+1}+c$. 3. $y = \frac{x}{4\ln 2}-\frac{1}{4\ln 2}+2$.

В-IV 2. а) $e^{7x+2}+2\cdot\frac{3^{-0,5x+1}}{\ln 3}+c$; б) $-20\ln(5-0,5x)+4\cdot\frac{(0,25x+4)^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}+c$.

3. $y = \frac{x}{3\ln 3}-\frac{1}{3\ln 3}+1$. В-V 3. e. 4. а) $\ln 5$; б) 2. В-VI 3. e^{-2}. 4. а) $\ln 3-\frac{1}{2}\ln 5$; б) 2.

К-5-1

В-I 1. $x = 0;y = -3$. 3. $x^2-4x+5 = 0$. 4. 0. 5. $\pm 2;\pm 2i$. В-II 1. $x = 1;y = -1$.
3. $x^2-8x+20 = 0$. 4. -4. 5. $\pm 3;\pm 3i$.

В-III 1. $x = 2;y = -1$. 3. $x^2-x+1 = 0$. 4. 2. 5. $1;2;-1\pm\sqrt{3}i;\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

В-IV 1. $x = 5;y = 2;x = 5;y = -2$. 3. $3x^2+2x+49 = 0$. 4. -1. 5. $1;-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

К-6-1

В-I 1. 13. 2. 479001600. 3. 56. В-II 2. 40320(8!). 3. 66. В-III. 1. 13. 2. 120. 3. $L_4^3 = 165$.

К-7-1

В-I 1. $P(A)\approx 0,44$. 2. а) $P(A\cdot B) = \frac{1}{105}$; б) $P(A\cdot C) = \frac{4}{315}$. 3. а) $P_8(3)\approx 0,63$;

б) $P(A) = 0,13$. 4. 9. В-II 1. а) $P(A) = \frac{5}{9}$; б) $P(B) = \frac{7}{9}$. 2. $P(A) = \frac{5}{14}$. 3. а) $P_5(0)\approx 0,77$;

б) $P_5(2)\approx 0,021$. 4. $M(7X) = 4,2$. В-III 1. а) $P(A)\approx 0,85$; б) $N(B) = 1260;P(B) = 0,064$.

2. а) $P(AB) = \frac{7}{124}$; б) $P(CD) = \frac{1}{62}$. 3. $P = 0,353$. 4. $\delta(X) = 1,52$.

В-IV 1. $P(A) = 1-\frac{C_n^k-m}{C_n^k}$. 2. $P(A_2) = \frac{5}{8}$. 3. $\approx 0,41$. 4. $M(XY)\approx 27,82$ (грн.).

В-V 1. а) $P(A) = \frac{3\cdot C_{16}^2}{C_{21}^7}\approx 0,0015$; б) $P(B)\approx 0,63$. 2. $P(C_1+C_2) = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}$.

3. $P_{10}(2\le m\le 5)\approx 0,51$. 4. $\approx 18,6$ (см). В-VI 1. а) $P(A)\approx 0,13$; б) $P(H) = 0,0022$.

2. $P(A) = \frac{1}{4}$. 3. а) $P_5(2) = C_5^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3$; б) $P_5(m\ge 1)\approx 0,74$.

4. $MX = 0,28;p_1 = 0,89;p_2 = 0,08$.

Тренировочные упражнения для абитуриента

§ 1.

1. а) $\frac{3}{5}$; б) $1;\frac{7}{5}$; в) $[-3;+\infty)$; г) $\varnothing$; д) $1;-2$; е) $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$; ж) $\varnothing$; з) -1; и) ±4; к) ±2; л) $2;-\frac{4}{3}$; м) $\pm1;\pm5;\pm(3+\sqrt{6})$. 2. а) $\varnothing$, если $a<0$; $5a$ и a, если ≥ 0; б) $\frac{5a}{3};-\frac{a}{5}$. 3. в) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$; г) $[0;+\infty)$; д) $(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$; ж) $(-\infty;-2)\cup(0;2)\cup(4;5)$; з) $(0;2)$; к) $\left[\frac{5}{3};5\right]$; л) $(-\infty;3)$; м) $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$. 3* а) $\left(\frac{2-2a}{3};+\infty\right)$, если $a\leq\frac{1}{4}$; $\left(\frac{2+2a}{5};+\infty\right)$, если $a\geq\frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{3+a}{7};\frac{3-a}{3}\right)$, если $a<\frac{6}{5}$; $\varnothing$, если $a=\frac{6}{5}$; $\left(\frac{3-a}{3};\frac{3+a}{7}\right)$, если $a>\frac{6}{5}$. 5. $(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{5}{2}\right)$. 6. $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n-1}}{(1-x)^2}$.

7. $y=4x-13; y=-4x+3$. 8. $v(2)=70$ м/с. 9. 800π см^3/с. 10. $\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$. 14. $90°$.

§ 2.

6. $x=\frac{1}{3}$ — точка максимума; $x=1$ — точка минимума. 7. $\frac{\sqrt{15}}{2}$. 8. $2\pi\sqrt[3]{4V^2}$. 9. $\frac{\pi m^2}{216}$. 12. $a=1$.

§ 3.

1. π. 2. $\frac{\pi}{2}+\pi n, (-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k, k, n\in Z$. 3. $a\leq-6; a\geq 4$. 4. 32. 5. а) 1; б) π. 6. $\frac{2}{3}$.

§ 4.

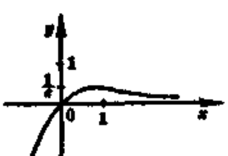
1. д) $f'(x)=5x^4\cdot e^x+x^5\cdot e^x; f'(x)=\frac{3x-x^3}{e^x}; f'(x)=\frac{e^x\cdot(x\cdot \ln x-1)}{x\cdot \ln^2 x}$;

е) $f'(x)=6\cdot e^{-2x}\cdot \sin 3x, f'(0)=6\cdot e^0\cdot \sin 0=0; f'(x)=-2\cdot e^{-x}\cdot \cos 2x$,
$f'(0)=-2\cdot e^0\cdot \cos 0=-2$.

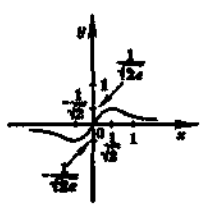
3. а) $-\frac{1}{3}\cdot \ln 4$; б) $9\cdot e^6-e^2$; в) $48+27\ln 2$; г) $\frac{\ln 14-\ln 2}{\ln 7}$. 5. а) $\ln 2-\ln 1$; б) e^4-e^2; в) $2,5+6(\ln 2-\ln 3)$; г) $4-3\ln 3$. 6. $y_{\text{кас.}}=2+2\ln 2(x-4)$.

7. $\max\limits_{[-1;2]} y(x)=8\frac{11}{19}$; $\min\limits_{[-1;2]} y(x)=6,5$.

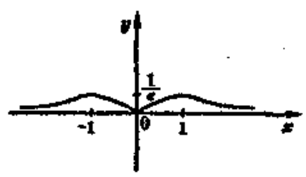
9. а)



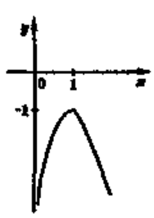
б)

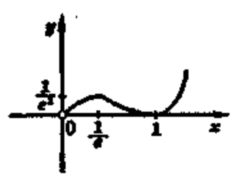


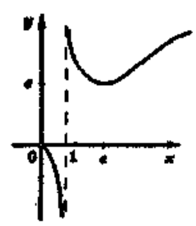
в)



15.







§ 5.

1. $1,5-2i$. 2. $y=-2x-1,5$. 3. $Z_1=6+8i; Z_2=6+17i$. 4. 2. 5. $a>1\frac{1}{4}$. 6. $8+6i$.

ISBN 966822023-4
9 789668 220234